INTRODUCTION À L'ÉQUATION DE BURGERS STOCHASTIQUE ET À LA BURGULENCE

TAKFARINAS KELAÏ & SERGEI KUKSIN

Résumé. Cet article propose une introduction à l'équation de Burgers visqueuse stochastique unidimensionnelle périodique, perturbée par une force aléatoire de type bruit blanc en temps, et suffisamment régulière en espace. Nous prouvons des résultats classiques sur l'existence et l'unicité des solutions, nous étudions leur régularité et nous discutons leurs propriétés quand le temps tend vers l'infini ou quand la viscosité ν tend vers zéro. La dernière limite décrit la turbulence dans l'équation de Burgers, nommée burgulence par U. Frisch. Notre article sert d'introduction élémentaire aux méthodes modernes de l'analyse des équations aux dérivées partielles stochastiques.

Table des matières

1. Introduction

On se propose d'étudier les propriétés qualitatives de l'équation de Burgers visqueuse stochastique avec une force aléatoire η^ω :

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \mathrm{u}_t(t,x) + \mathrm{u}(t,x)\,\mathrm{u}_x(t,x) - \nu\,\mathrm{u}_{xx}(t,x) = \eta^\omega(t,x), \\ t \geq 0,\ \ x \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ici $\nu \in (0,1]$ est la *viscosité*. On suppose que pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \eta^\omega(t,x)dx = \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{u}(0,x)dx = 0.$$

Date: 30 avril 2015.

D'ici et d'après (B), on a pour tout $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{u}(t,x)dx = 0.$$

On note H l'espace de Hilbert défini par

$$H = \{v \in L_2(\mathbb{S}^1) : \int_{\mathbb{S}^1} v(x)dx = 0\},$$

muni de la norme usuelle et du produit scalaire de L_2 qu'on notera $||\cdot||$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et de la base Hilbertienne $\{e_k(x), k \in \mathbb{Z}^*\}$ avec

$$\begin{cases} e_s = \sqrt{2}\cos(2\pi sx) \\ e_{-s} = \sqrt{2}\sin(2\pi sx) \end{cases} \quad s \in \mathbb{N}^\star. \tag{1.1}$$

Notons que si $\mathrm{u}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} \mathrm{u}_s\, e_s(x)$ alors

$$\mathrm{u}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{u}}_s e^{2i\pi sx}, \quad \widehat{\mathrm{u}}_s = \overline{\widehat{\mathrm{u}}}_{-s} = \left(\sqrt{2}\right)^{-1} (\mathrm{u}_s - i\,\mathrm{u}_{-s}) \text{ pour tout } s \in \mathbb{N}^\star. \tag{1.2}$$

Dans la suite, on donne η^ω de la forme :

$$\eta^\omega(t,x) = \partial_t \xi^\omega(t,x), \quad \text{et } \xi^\omega(t,x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} b_s \beta_s^\omega(t) e_s(x), \tag{1.3}$$

où $b_s \in \mathbb{R}$ et β_s^ω sont des processus de Wiener standard indépendants (appendice A), définie sur un espace de probabilité standard $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ [17], [28]. Pour tout $m \geq 0$, on pose

$$B_m = \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} |s|^{2m} b_s^2 \leq +\infty. \tag{1.4}$$

Nous supposerons toujours que $B_0 < \infty$. On appelle la force aléatoire η^ω le *Bruit blanc* dans l'espace H et ξ^ω le *processus de Wiener dans* H. On dit que u^ω est une solution de (B), (1.3), si

$$\mathrm{u}^\omega(t,x) - \mathrm{u}^\omega(0,x) + \int_0^t (\mathrm{u}(s,x)\,\mathrm{u}_x(s,x) - \nu\,\mathrm{u}_{xx}(s,x))\,ds = \xi^\omega(t,x) - \xi^\omega(0,x),$$

pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{S}^1$, et pour tout $\omega \notin Q$, où Q est un ensemble négligeable (C'est-à-dire, $Q \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(Q) = 0$).

L'équation (B), (1.3) est un modèle populaire en physique théorique moderne [2]. Nous étudions le problème de Cauchy relatif à (B), ainsi que les propriétés qualitatives de ses solutions. À savoir, dans les sections 2-6, nous prouvons les propriétés d'existence et d'unicité des solutions de (B) et discutons les processus de Markov correspondants. Puis, dans les sections 7-8, nous obtenons des bornes supérieures et inférieures pour les normes Sobolev des solutions, lesquelles sont asymptotiquement précises quand $\nu \to 0$. Dans la section 9, nous déduisons de ces estimations que l'échelle d'espace pour les solutions de (B) est égale à ν. Les résultats des sections 7-9 sont basés sur les thèses [5], [8] (voir aussi [4], [7]), où les méthodes suggérées dans [21], [22] pour étudier l'équation de Ginzburg-Landau complexe, sont appliquées à (B). Dans les sections 10-12, nous étudions les propriétés de mélange de l'équation de Burgers, utilisant l'approche du couplage de Döblin et suivant [7], [23]. Enfin, dans les sections 13-14, on montre que les estimations des sections 7-8 entraînent que le spectre de l'energie des solutions de (B) est de la forme de la loi de Kolmogorov [13], $E_k \sim k^{-2}$. Là, nous suivons [8], [7], où la dérivation heuristique du spectre, suggérée dans [1], est rigoureusement justifiée, ceci étant basé sur les résultats des sections précédentes.

Cet article est basé sur les notes de cours pour la seconde année de Master de Mathématiques Fondamentales à l'université de Paris Diderot, donné par S. K lors des années universitaires 2012/2013 et 2014/2015.

2. Estimations de la force ξ^ω

Pour $T > 0$, notons par X^T l'espace de Banach $\mathcal{C}(0,T;H)$, muni de la norme $||\xi||_{X^T} = \sup_{t\in[0,T]} ||\xi(t)||$.

Théorème 2.1. *Il existe une ensemble négligeable $Q \in \mathcal{F}$ tel que si $\omega \notin Q$, alors pour tout $T > 0$ nous avons $\xi^\omega \in X^T$. De plus, il existe $\alpha(T, B_0) > 0$, $C'(T, B_0) > 0$, et pour chaque $p \geq 1$, il existe $C(p, T, B_0) > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[e^{\alpha||\xi^\omega(t)||^2}] \leq C', \tag{2.1}$$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in(0,T)} ||\xi^\omega(t)||]^p \leq C. \tag{2.2}$$

Si $\omega \in Q$, alors on redéfinit ξ^ω par $\xi^\omega = 0$. Ainsi $\xi^\omega \in X^T$ pour tout ω.

Démonstration. Étape 1 : troncature. Fixons $T > 0$ et posons pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$H^{(N)} = vect\{e_j, |j| \leq N\} \subset H \text{ et } \xi^{N\omega}(t,x) = \sum_{|s|\leq N} b_s \beta_s^\omega(t) e_s(x).$$

Alors $\xi^{N\omega}$ est un processus aléatoire continu dans $H^{(N)}$ [1]. Pour $t \geq 0$, on a

$$||\xi^{N\omega}(t)||^2 = \sum_{|s|\leq N} b_s^2 \beta_s^\omega(t)^2$$

Maintenant on va estimer les moments exponentiels de $\sup_{t\in(0,T)} ||\xi^{N\omega}(t)||$. On a immédiatement pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{E}[e^{\alpha||\xi^{N\omega}(T)||^2}] = \mathbb{E}\left[e^{\alpha \sum\limits_{|s|\leq N} b_s^2 \beta_s^\omega(T)^2}\right] = \prod_{|s|\leq N} \mathbb{E}[e^{\alpha b_s^2 \beta_s^\omega(T)^2}],$$

car les processus $\{\beta_s\}$ sont indépendants. Comme $\beta_s(T) = \mathcal{N}(0, \sqrt{T})$, nous avons que

$$\mathbb{E}[e^{\alpha b_s^2 \beta_s^\omega(T)^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha b_s^2 x^2} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = \frac{1}{\sqrt{1 - 2T\alpha b_s^2}}, \quad \text{si } \alpha < \frac{1}{2Tb_s^2}.$$

En notant $b_{\max} = \sup_{s\geq 1} |b_s|$, on obtient que

$$\mathbb{E}[e^{\alpha||\xi^{N\omega}(T)||^2}] = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{|s|\leq N} \ln(1-2T\alpha b_s^2)}, \text{ si } \alpha < \frac{1}{2Tb_{\max}^2}. \tag{2.3}$$

Comme pour tout $|x| \leq \frac{1}{2}$ nous avons $-\ln(1-x) \leq 2x$, alors (2.3) implique

$$\mathbb{E}[e^{\alpha||\xi^{N\omega}(T)||^2}] \leq e^{\sum\limits_{|s|\leq N} 2T\alpha b_s^2} = e^{2T\alpha B^{(N)}}, \text{ si } \alpha < \frac{1}{2Tb_{\max}^2}, \tag{2.4}$$

avec $B^{(N)} = \sum_{|s|\leq N} b_s^2 \leq B_0$. Or, pour tout $p \geq 1$ et $\alpha > 0$ il existe $C(p,\alpha) > 0$ telle que pour chaque $x \geq 0$, on a $x^p \leq Ce^{\alpha x^2}$. Donc, en utilisant l'inégalité (2.4), nous obtenons

$$\mathbb{E}[||\xi^{N\omega}(T)||^p] \leq C(p, T, B_0).$$

Par l'inégalité de Doob (15.1) (appendice A), cette inégalité implique que :

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in(0,T)} ||\xi^{N\omega}(t)||]^p \leq C'(p, T, B_0), \quad \text{pour } p > 1. \tag{2.5}$$

L'inégalité pour $p = 1$ suit de (2.5) avec $p = 2$.

Étape 2 : passage à la limite. Pour $N < M$, considérons

$$\xi_N^M := \xi^{M\omega} - \xi^{N\omega} = \sum_{N<|s|\leq M} b_s \beta_s^\omega e_s.$$

1. C'est à dire, pour presque tout ω, l'application $t \longmapsto \xi^{N\omega}(t) \in H^{(N)}$ est continue.

Comme $\mathbb{E}||\xi_N^M(t)||^2 = \sum_{N<|s|\leq M} b_s^2$, alors par l'inégalité de Doob, nous avons

$$\mathbb{E}\left[||\xi_N^M||^2_{X^T}\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}||\xi_N^M(t)||^2\right] \leq 4\sum_{N<|s|\leq M} b_s^2. \tag{2.6}$$

On considère l'espace de Hilbert $\mathbb{L}_2 = L_2(\Omega; X^T)$. Par (2.6), pour $N < M$, on a $||\xi^{M\omega} - \xi^{N\omega}||^2_{\mathbb{L}_2} \leq 4\sum_{N<|s|\leq M} b_s^2$. Comme $\sum b_s^2 = B_0 < \infty$, alors $\{\xi^{M\omega}\} \subset \mathbb{L}_2$ est une suite de Cauchy et $\xi^{M\omega} \to \xi^\omega \in \mathbb{L}_2$ quand $M \to +\infty$. Comme la convergence dans $\mathbb{L}_2$ implique la convergence p.p pour une sous-suite, alors, il existe un ensemble négligeable Q^T tel que $\xi^{M_j\omega} \to \xi^\omega$ dans X^T pour une sous-suite $M_j \to +\infty$ et $\omega \notin Q^T$. Soit $Q = Q^1 \cup Q^2 \cup \cdots$. Par le procédé diagonale de Cantor, on construit une suite $M_j \to +\infty$ telle que $\xi^{M_j\omega} \to \xi^\omega =: \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} b_s\beta_s^\omega e_s$ dans X^T, $T = 1, 2, \cdots$ et pour tout $\omega \notin Q$.

En utilisant cette convergence, la relation (2.4) et le théorème de Beppo-Levi, on obtient l'inégalité (2.1). De même, (2.5) et le théorème de Beppo-Levi nous donnent (2.2). □

Dans la suite, on désigne par H^m l'espace de Sobolev défini par

$$H^m = \{v \in H, v^{(m)} \in H\},$$

où $u^{(m)} := \partial_x^m u$ représente la dérivée faible en x à l'ordre m de u. On munit H^m du produit scalaire homogène

$$\langle u, v\rangle_m = \int_{\mathbb{S}^1} u^{(m)}(x)v^{(m)}(x)dx,$$

On note par $||\cdot||_m$ la norme associée au produit scalaire. Notons que $\partial_x : H^{m+1} \to H^m$ est un isomorphisme et $||\partial_x^k u||_m = ||u||_{m+k}$, pour tout $m, k \in \mathbb{N}$.

Si $u \in H$ alors u s'écrit dans la base trigonométrique (1.1) comme $u(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} u_s e_s(x)$, et la norme de u dans H^m est

$$||u||_m^2 = (2\pi)^m \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} |s|^{2m}|u_s|^2.$$

On utilise cette caractérisation pour définir H^m pour tout $m \geq 0$:

$$H^m = \{u \in H, ||u||_m < \infty\}.$$

Pour $m < 0$, on définit H^m comme le complété de H par rapport à la norme $||\cdot||_m$.
On rappelle l'injection de Sobolev :

$$H^m \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbb{S}^1) \iff m > k + \frac{1}{2}, \tag{2.7}$$

et que l'espace H^m pour $m > \frac{1}{2}$ est une algèbre Hilbertienne :

$$||uv||_m \leq c_m||u||_m||v||_m. \tag{2.8}$$

Pour $T > 0$, on note par X_m^T l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, T; H^m)$ muni de la norme $||u||_{X_m^T} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_m$. Avec ces notations, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et supposons que $B_m < \infty$. Alors pour chaque $\omega \in \Omega$ et pour tout $T > 0$ nous avons $\xi^\omega \in X_m^T$, et il existe $\alpha(T, B_m) > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[e^{\alpha||\xi^\omega(T)||_m^2}] \leq C'_m, \tag{2.9}$$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in(0,T)} ||\xi^\omega(t)||_m]^p \leq C''_m, \quad \forall p \geq 1, \tag{2.10}$$

pour des constantes convenables $C'_m(T, B_m) > 0$, $C''_m(p, T, B_0) > 0$.

Ici, comme pour le théorème 2.1, nous avons modifié ξ^ω sur un ensemble négligeable.
La démonstration est similaire à celle du théorème 2.1.

3. Problème de Cauchy

Dans cette section on étudie le problème aux limites périodique (B), (1.3) avec la condition initiale.

$$\mathrm{u}(0,x) = \mathrm{u}_0(x). \tag{3.1}$$

3.1. Préliminaires.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère l'équation de la chaleur

$$\text{(CH)} \qquad \begin{cases} v_t(t,x) - \nu v_{xx}(t,x) = \xi_t(t,x), \quad \xi \in X_m^T \\ v(0,x) = \mathrm{u}_0(x). \end{cases}$$

On dit que $v \in X_m^T$ est une solution de (CH) si pour tout $t \in [0,T]$:

$$v(t) - \nu \int_0^t v_{xx}(s)ds = \mathrm{u}_0 + \xi(t).$$

Le lemme suivant est un résultat élémentaire des équations aux dérivées partielles paraboliques. Pour le démontrer, on décompose la force ξ et v dans la base trigonométrique (1.1) et on retrouve les coefficients de Fourier de v.

Lemme 3.1. *Soit $m \geq 0$ et $T > 0$. Alors pour tout $\xi \in X_m^T$ et $\mathrm{u}_0 \in H^m$, il existe une unique solution $v \in X_m^T$ de (CH). De plus l'application $H^m \times X_m^T \to X_m^T$, $(\mathrm{u}_0, \xi) \longmapsto v$ est linéaire et continue.*

3.2. Décomposition des solutions de (B).

On écrit maintenant une solution u de (B), (3.1) comme

$$\mathrm{u}(t,x) = w(t,x) + v(t,x),$$

où v est la solution de (CH). Ainsi, w vérifie l'équation de Burgers perturbée :

$$\text{(BP)} \qquad \begin{cases} w_t - \nu w_{xx} + \frac{1}{2}((w+v)^2)_x = 0, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

L'avantage de se ramener de l'équation (B) à (BP) est le fait que tous les coefficients de cette dernière sont réguliers. Dans la suite on résout l'équation (BP). On commence par deux lemmes qui portent sur des inégalités fonctionnelles.

Lemme 3.2. *(inégalité de Gagliardo-Niremberg [29])*
Pour tout $(m,(r,q)) \in \mathbb{N}^* \times [1,\infty]^2$ et $\beta \in [0, m-1]$, il existe $C(\beta,q,r,m) > 0$ telle que

$$|w^{(\beta)}|_r \leq C||w||_m^\theta |w|_q^{1-\theta}, \quad \theta(\beta,q,r,m) = \frac{\beta + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{m + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Lemme 3.3. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $q \in [1,\infty]$ et $w \in H^{m+1}$. Alors, il existe $C(m) > 0$ telle que*

$$|\langle \partial_x^{2m} w, \partial_x w^2 \rangle| \leq C||w||_{m+1}^{1+\theta} |w|_q^{2-\theta}, \quad \theta(m,q) = \frac{m + \frac{2}{q} - \frac{1}{2}}{m + \frac{1}{q} + \frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

Démonstration. Par la formule de Leibniz, nous avons

$$|\langle \partial_x^{2m} w, \partial_x w^2 \rangle| \leq C(m) \sum_{n=0}^m \int |w^{(n)} w^{(m-n)} w^{(m+1)}| dx. \tag{3.4}$$

Nous majorons l'intégrale du membre de droite de (3.4) par l'inégalité de Hölder. On obtient

$$\int |w^{(n)} w^{(m-n)} w^{(m+1)}| dx \leq |w^{(n)}|_{p_1} |w^{(m-n)}|_{p_2} ||w||_{m+1},$$

avec $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2}$. D'où en utilisant (3.2) avec $m := m+1$, et $r = n$ puis $r = m-n$, nous avons

$$\int |w^{(n)} w^{(m-n)} w^{(m+1)}| dx \leq C||w||_{m+1}^{1+\theta} |w|_q^{2-\theta},$$

où $\theta = \theta(n,q,p_1,m+1) + \theta(m-n,q,p_2,m+1) = \frac{m+\frac{2}{q}-\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}$. De cette dernière inégalité et de la relation (3.4), on déduit (3.3). □

Théorème 3.1. *Soit $m \geq 1$, $B_m < \infty$, $T > 0$ et $v \in X_m^T$. Alors il existe une unique solution $w \in X_m^T$ de (BP) et il existe $C_m(T, \nu, ||v||_{X_m^T}) > 0$ telle que*

$$||w(t)||_{X_m^T} + \int_0^T ||w(t)||_{m+1}^2 dt \leq C_m. \tag{3.5}$$

Démonstration. Étape 0 : unicité. Soient $w', w'' \in X_m^T$ solutions de (BP) et $v \in X_m^T$. Alors $w := w' - w''$ vérifie l'équation

$$w_t - \nu w_{xx} = \frac{1}{2}((w' + w'' + 2v)w)_x, \quad w(0) = 0.$$

En prenant le produit scalaire L_2 de cette équation avec w, et en faisant des intégrations par partie, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2 + \nu||w(t)||_1^2 = -\frac{1}{2}\int (w'(t) + w''(t) + 2v(t))w(t)w_x(t)dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'injection de H^1 dans L_∞, et l'inégalité de Young, le membre à droite est majoré par

$$\begin{aligned}\int |(w'(t) + w''(t) + 2v)w(t)w_x(t)|dx &\leq ||(w'(t) + w''(t) + 2v(t))w(t)|| \cdot ||w_x(t)|| \\ &\leq C(\frac{C}{2\nu}||w(t)||^2 + \frac{\nu}{2C}||w(t)||_1^2).\end{aligned}$$

Donc $\frac{d}{dt}||w(t)||^2 \leq C_1||w(t)||^2$. Comme $w(0) = 0$, le lemme de Gronwall implique que $||w(t)||^2 = 0$. D'où l'unicité.

Étape 1 : estimations à priori. Supposons que $v \in X_m^T$ et que $w \in X_m^T$ est la solution de (BP) et montrons d'abord l'inégalité (3.5), où à gauche, m est remplacer par $m = 0$. Après avoir multiplié (BP) par w et intégré en espace, le membre de gauche s'écrit comme

$$\int (w_t - \nu w_{xx})wdx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2 + \nu||w(t)||_1^2,$$

et le membre de droite devient

$$-\frac{1}{2}\int ((w + v)^2)_x wdx = \frac{1}{2}\int (w^2 w_x + v^2 w_x + 2vww_x)dx = \frac{1}{2}\int (v^2 w_x + 2vww_x)dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young, et utilisant (2.7) avec $k = 0$, nous obtenons que le terme à droite est borné par

$$\frac{\nu}{4}||w(t)||_1^2 + c||v||_{X_1^T}^4 + \frac{\nu}{4}||w(t)||_1^2 + c||v||_{X_1^T}^2||w(t)||^2, \quad c = c(\nu).$$

Donc, on a

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2 + \nu||w(t)||_1^2 \leq c_1||v||_{X_1^T}^2||w(t)||^2 + c_2||v||_{X_1^T}^4.$$

Par le lemme de Gronwall, il en résulte que

$$||w(t)||^2 \leq tc_2||v||_{X_1^T}^4 e^{c_1||v||_{X_1^T}^2 t} \leq c_0(T), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.6}$$

Maintenant, on va utiliser (3.6) pour estimer $||w(t)||_m$. Multiplions l'équation dans (BP) par $w^{(2m)}$. Alors, par une intégration par parties en espace, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_m^2 + \nu||w(t)||_{m+1}^2 \leq \left|\langle\frac{d^m}{dx^m}(w(t) + v(t))^2, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}w(t)\rangle\right| \\ &\leq \underbrace{\left|\langle w^2(t)^{(1)}, w(t)^{(2m)}\rangle\right|}_{=:I_1} + 2\underbrace{\left|\langle (wv)(t)^{(m)}, w(t)^{(m+1)}\rangle\right|}_{=:I_2} + \underbrace{\left|\langle v^2(t)^{(m)}, w(t)^{(m+1)}\rangle\right|}_{=:I_3}.\end{aligned}$$

Par (3.3) (avec $\theta = \theta(m, 2)$), nous avons

$$|I_1| \leq C_1||w(t)||_{m+1}^{1+\theta}||w(t)||^{2-\theta}, \quad \theta = \frac{2m+1}{2m+2}.$$

L'inégalité de Young appliquée au membre à droite de cette inégalité implique que

$$I_1 \leq \frac{\nu}{4}||w(t)||^2_{m+1} + C_1^{'}||w(t)||^{c_1^{'}}.$$

Nous avons aussi

$$I_2 \leq \frac{\nu}{4}||w(t)||^2_{m+1} + C_2^{'}(||v||_{X_m^T})||w(t)||^{c_2^{'}}, \quad I_3 \leq \frac{\nu}{4}||w(t)||^2_{m+1} + C_3^{'}(||v||_{X_m^T})||w(t)||^{c_3^{'}}.$$

Pour estimer $I_2 = 2\langle wv(t), w_x(t)\rangle_m$, on utilise (2.8) et (3.2) :

$$\begin{aligned} 2\langle wv(t), w_x(t)\rangle_m &\leq C||wv(t)||_m||w(t)||_{m+1} \leq C_1||w(t)||_m||v(t)||_m||w(t)||_{m+1} \\ &\leq C_m||v(t)||_m||w(t)||^{1-\frac{m}{m+1}}||w(t)||^{1+\frac{m}{m+1}}_{m+1}, \end{aligned}$$

et on conclut par l'inégalité de Young. De manière similaire, on dérive une estimation du même type pour I_3. En utilisant (3.6), on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_m + \frac{\nu}{4}||w(t)||^2_{m+1} \leq C^{'}(||v||_{X_m^T})c_0(T)^{c^{'}}. \tag{3.7}$$

Finalement, l'intégration de cette relation sur $[0, T]$ permet de conclure à la validité de (3.5) pour tout $m \geq 1$.

Étape 2 : approximation de Galerkin. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit

$$H^{(N)} = vect\{e_j, |j| \leq N\} \subset H,$$

et $\{w^N\}$ la suite des solutions approchées de Galerkin du problème (BP) définie par

$$w^N(t) = \sum_{|s|\leq N} \alpha_s(t)e_s,$$

où les $\alpha_s(t)$ sont à déterminer. En effet, en substituant w^N dans l'équation de (BP) et en prenant le produit scalaire L_2 dans les deux membres de l'égalité avec e_j, $|j| \leq N$, nous obtenons une EDO de la forme :

$$\frac{d\alpha_j}{dt}(t) = -(2\pi j)^2\alpha_j(t) + P_j(\alpha(t), t), \quad \alpha_j(0) \equiv 0, \quad |j| \leq N, \tag{3.8}$$

où $P_j(\alpha, t)$ est un polynôme fini en $\alpha = (\alpha_k)_{|k|\leq N}$ et en $(v_k(t))_{k\in\mathbb{Z}^*}$. Donc, $P_j(\alpha, t)$ est une fonction lisse en α et continue en t, on conclut à l'existence d'une unique solution $w^N \in \mathcal{C}^1([0, T^N[; H^{(N)})$ de (3.8) , où T^N est le temps maximal d'existence.

Exactement comme dans l'étape 1, on montre que w^N vérifie l'inégalité (3.5) et donc $||w^N(t)||$ est borné uniformément en N. En particulier $\limsup_{t\to T^N}||w^N(t)|| < \infty$ ce qui implique que $T^N = T$.

Étape 3 : Convergence. En utilisant l'équation (BP), on trouve que $\{w^N\}$ est borné dans l'espace de Hilbert

$$W^m = \{u \in L_2(0, T; H^{m+1}) : u_t \in L_2(0, T; H^{m-1})\}.$$

Comme $W^m \Subset L_2(0, T; H^m)$ [24, Théorème 5.1], alors il existe une sous-suite $\{w^{N_j}\}$ qui converge vers $w \in W^m$ faiblement dans W^m et fortement dans $L_2(0, T; H^m)$. On procède comme dans [24] pour vérifier que w est solution de (BP) et satisfait bien les estimations à priori. De plus, $W^m \subset X_m^T$ [25], donc $w \in X_m^T$.

La suite $\{w^N\}$ est bornée dans X_m^T et H^m est relativement compact dans H^{m-1}. Comme $\{\partial_t w^N\}$ est borné dans $L_2(0, T; H^{m-1})$, alors la suite $\{w^N\}$ est équicontinue dans H^{m-1}. Donc, par le théorème d'Ascoli, $\{w^N\}$ est précompact dans X_{m-1}^T, et $\{w^{N_j}\}$ converge vers w dans X_{m-1}^T (Nous utiliserons cette convergence plus tard). □

Remarque 1. *Une version simplifiée de cet argument nous montre que pour tout $T > 0$, $m \geq 1$, $v \in X_m^T$ et $z \in X_{m-1}^T$, l'équation linéaire*

$$\begin{cases} w_t - \nu w_{xx} + (vw)_x = z, \\ w_{|t=0} = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

admet une unique solution $w \in X_m^T$ vérifiant :

$$||w||_{X_m^T} \leq C||z||_{X_{m-1}^T}, \quad C = C(\nu, T, ||v||_{X_m^T}). \tag{3.10}$$

3.3. **Existence et unicité pour Burgers.** D'après le lemme 3.1 et le théorème 3.1 on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Pour tout* $T > 0$ $m \geq 1$, $\mathrm{u}_0 \in H^m$ *et* $\xi \in X_m^T$ *il existe une unique solution* u *dans* X_m^T *de (B), (1.3),(3.1). De plus,* u *satisfait*

$$||\,\mathrm{u}\,||^2_{X_m^T} + \int_0^T ||\,\mathrm{u}(t)||^2_{m+1} dt \leq C_m, \quad C_m = C_m(T, \nu, ||\,\mathrm{u}_0\,||_m, ||\xi||_{X_m^T}) > 0 \tag{3.11}$$

3.4. **Analyticité du flot.** Désormais, nous étudions la régularité de l'application

$$H^m \times X_m^T \to X_m^T, (\mathrm{u}_0, \xi) \longmapsto \mathrm{u}$$

où u est la solution de (B), (3.1) avec $\eta = \partial_t \xi$.

Considérons l'équation de la chaleur

$$w_t - \nu w_{xx} = z, \quad w_{|t=0} = 0. \tag{3.12}$$

Par la remarque 1, si $m \geq 1$ et $z \in X_{m-1}^T$ alors (3.12) a une unique solution $w \in X_m^T$ et

$$||w||_{X_m^T} \leq C||z||_{X_{m-1}^T}, \quad C = C(m, \nu, T). \tag{3.13}$$

Soit $m \geq 1$ et notons par $X_{m,0}^T l'ensemble \{w \in X_m^T : w(0) = 0\}$, et soit $\mathcal{L}$ l'application définie par

$$\mathcal{L} : X_{m+1,0}^T \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{m-1}) \to X_{m-1}^T, \quad w \longmapsto w_t - \nu w_{xx}.$$

Par (3.13), l'application $\mathcal{L}^{-1} : X_{m-1}^T \to X_{m,0}^T$ est une immersion continue. On définit l'espace $Z_m^T = \mathcal{L}^{-1}(X_{m-1}^T)$ muni de la norme $||w||_{Z_m^T} = ||\mathcal{L}w||_{X_{m-1}^T}$ qui est un espace de Banach. Cet espace s'injecte continûment dans $X_{m,0}^T$ et $\mathcal{L}$ définit une isométrie entre Z_m^T et X_{m-1}^T.

Considérons l'équation (BP) avec $v \in X_m^T$. Par le théorème 3.1 la solution $w \in X_m^T$. Donc, $\partial_x((w+v)^2) \in X_{m-1}^T$ et $w = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\partial_x((w+v)^2)\right) \in Z_m^T$. Écrivons (BP) comme

$$\Phi(w, v) = 0, \quad \Phi(w, v) = w + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1} \circ \partial_x((w+v)^2). \tag{3.14}$$

Notons que pour chaque $v \in X_m^T$ l'équation $\Phi(w, v) = 0$ possède une unique solution $w \in Z_m^T$.

Lemme 3.4. *Pour tout* $T > 0$ *et* $m \geq 1$, Φ *définit une application analytique de* $Z_m^T \times X_m^T$ *dans* Z_m^T.

Démonstration. L'application $X_m^T \to X_m^T, w \longmapsto (v+w)^2$ est analytique car polynomiale et continue [10]. Comme $Z_m^T \hookrightarrow X_{m,0}^T$ alors l'application

$$Z_m^T \times X_m^T \to Z_m^T, (w, v) \longmapsto (v+w)^2 \longmapsto \partial_x((w+v)^2) \longmapsto \mathcal{L}^{-1} \circ \partial_x((w+v)^2)$$

est aussi analytique. Donc Φ est analytique. □

Pour tout $(w, v) \in Z_m^T \times X_m^T$, la différentielle de Φ en $w \in Z_m^T$ évaluée en $h \in Z_m^T$ est l'application $d_w\Phi(w, v)(h) : Z_m^T \to Z_m^T$, telle que $d_w\Phi(w, v)(h) = h + \mathcal{L}^{-1} \circ \partial_x(w+v)h$ [10]. Cette application est continue par le lemme 3.4.

Lemme 3.5. *Pour tout* $T > 0$, $m \geq 1$ *et* $(w, v) \in Z_m^T \times X_m^T$, $d_w\Phi$ *est un isomorphisme de* Z_m^T.

Démonstration. Il est clair que pour tout $w, h, g \in Z_m^T$ et $v \in X_m^T$, on a $d_w\Phi(h) = g$ si et seulement si

$$h_t - \nu h_{xx} + \partial_x(w+v)h = \mathcal{L}g. \tag{3.15}$$

Comme $(w+v,\ \mathcal{L}g) \in X_m^T \times X_{m-1}^T$, la remarque 1 implique qu'il existe une unique solution $h \in X_{m,0}^T$ de (3.15) et que l'application $X_m^T \to X_{m,0}^T$, $\mathcal{L}g \longmapsto h$ est continue. □

Finalement, par les lemmes 3.4 et 3.5, et la version analytique du théorème des fonctions implicites [27, Appendix B], nous obtenons que l'unique solution $w \in Z_m^T$ de l'équation $\Phi(w, v) = 0$ est une fonction analytique de $v \in X_m^T$. Comme nous avons écrit la solution u de l'équation de Burgers comme $\mathrm{u} = v + w$, on a par le lemme 3.1, le

Théorème 3.3. *Soit $m \geq 1$ et $T > 0$. Si* u *est la solution de (B),(3.1) avec $\eta = \partial_t \xi$, alors l'application $\mathcal{M} : H^m \times X_m^T \to X_m^T, (\mathrm{u}_0, \xi) \longmapsto \mathrm{u}$ est analytique. En particulier $\mathcal{M}$ est continue.*

On munit l'espace $H^m \times X_m^T$ de la norme :

$$|||(f,h)||| = ||f||_{H^m} + ||h||_{X_m^T}.$$

Proposition 3.1. *l'application $\mathcal{M}$ du théorème 3.3 est localement Lipschitzienne*[2].

Démonstration. Soit $m \geq 1$ et $T > 0$. Nous notons par $H^{m\mathbb{C}}$ l'espace de Sobolev complexe (la complixification de l'espace H^m). On définit $X_m^{T\mathbb{C}}$ et $Z_m^{T\mathbb{C}}$ comme les analogues complexes des espaces X_m^T et Z_m^T.

En utilisant la version analytique complexe du théorème des fonctions implicites [27, Appendix B], nous trouvons que si $w' \in Z_m^{T\mathbb{C}}$, $v' \in X_m^{T\mathbb{C}}$ et $\Phi(w', v') = 0$ (cf. (3.14)) alors w' est une fonction analytique de v', et il existe $\varepsilon = \varepsilon(v') > 0$ telle que l'application $v' \longmapsto w'(v')$ vérifiant $\Phi(w'(v'), v') = 0$ se prolonge en une application analytique complexe :

$$\Phi : B_{v'}^{\varepsilon} := \{v \in X_m^{T\mathbb{C}} : ||v - v'||_{X_m^{T\mathbb{C}}} < \varepsilon\} \to Z_m^{T\mathbb{C}},$$

qui est bornée en norme par une constance $K(v') > 0$. De plus, nous pouvons choisir $\varepsilon = \varepsilon(||v'||_{X_m^{T\mathbb{C}}})$ et $K = K(||v'||_{X_m^{T\mathbb{C}}})$ telles que ε, K soient des fonctions continues positives. Donc, il existe $\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{K} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tels que l'application $\mathcal{M}$ du théorème 3.3 se prolonge en une application analytique complexe :

$$\mathcal{M} : \mathcal{O}^{\mathbb{C}} \to X_m^{T\mathbb{C}}, \tag{3.16}$$

où $\mathcal{O}^{\mathbb{C}} = \{\mathrm{u}_0 \in H^{m\mathbb{C}} : ||\operatorname{Im} \mathrm{u}_0||_m \leq \widetilde{\varepsilon}(||\operatorname{Re} \mathrm{u}_0||_m)\} \times \{\xi \in X_m^{T\mathbb{C}} : ||\operatorname{Im} \xi||_{X_m^{T\mathbb{C}}} \leq \widetilde{\varepsilon}(||\operatorname{Re} \xi||_{X_m^{T\mathbb{C}}})\}$, et telle que $||\mathcal{M}(\mathrm{u}_0, \xi)||_{X_m^{T\mathbb{C}}} \leq \widetilde{K}(||\mathrm{u}_0||_{H^{m\mathbb{C}}} + ||\xi||_{X_m^{T\mathbb{C}}})$. Chaque couple $(\mathrm{u}_0, \xi) \in H^m \times X_m^T$ se plonge dans $\mathcal{O}^{\mathbb{C}} \subset H^{m\mathbb{C}} \times X_m^{T\mathbb{C}}$ avec son voisinage complexe de rayon $\widetilde{\varepsilon}(|||(\mathrm{u}_0, \xi)|||)$. Donc, par l'analyticité de (3.16) et l'inégalité de Cauchy [16, Section VII.A], nous avons que pour tout $\mathrm{u}_0 \in H^m$ et $\xi \in X_m^T$:

$$||d\mathcal{M}(\mathrm{u}_0, \xi)||_{H^m \times X_m^T, X_m^T} \leq \min\left(\widetilde{\varepsilon}(||\mathrm{u}_0||_m), \widetilde{\varepsilon}(||\xi||_{X_m^T})\right)^{-1} \widetilde{K}(||\mathrm{u}_0||_{H^{m\mathbb{C}}} + ||\xi||_{X_m^{T\mathbb{C}}}).$$

Donc, $\mathcal{M}_t$ est localement Lipschitzienne. □

Pour $t \in [0, T]$ et $m \geq 1$, nous notons par $\mathcal{M}_t$ l'application

$$\mathcal{M}_t : H^m \times X_m^T \to H^m, (\mathrm{u}_0, \xi) \longmapsto \mathrm{u}(t) = \mathcal{M}_{|t=\mathrm{const}}. \tag{3.17}$$

Elle est analytique par le théorème 3.3.

Parfois, on notera

$$\mathrm{u}(\cdot; \mathrm{u}_0, \xi) = \mathcal{M}(\mathrm{u}_0, \xi)$$

la solution de (B), (3.1) avec $\eta = \partial_t \xi$, et on notera

$$\mathrm{u}^{\omega}(\cdot; \mathrm{u}_0) = \mathcal{M}(\mathrm{u}_0, \xi^{\omega})$$

la solution de (B), (1.3), (3.1).

4. Principe du maximum de Kružkov

Le but de cette section est d'estimer u, u_x et $\mathrm{u}_x^+ := \max(0, \mathrm{u}_x)$, en se basant sur la méthode de Kružkov [19]. Commençons avec un lemme évident.

Lemme 4.1. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{S}^1; \mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{S}^1} f(x)dx = 0$ et $f'(x) \leq c^*$ pour tout x. Alors $|f|_\infty \leq c^*$ et $|f'|_1 \leq 2c^*$.*

Le théorème suivant nous fournit des estimations portant sur $\mathrm{u}_x^+(t)$, $\mathrm{u}(t)$ dans L_∞, et sur $\mathrm{u}_x(t)$ dans L_1.

---

2. C'est à dire, il existe une fonction $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $\mathrm{u}_0\, \mathrm{u}_0' \in H^m$ et $\xi, \xi' \in X_m^T$:

$$||\mathcal{M}(\mathrm{u}_0, \xi) - \mathcal{M}(\mathrm{u}_0', \xi')||_{X_m^T} \leq C(\max(|||\mathrm{u}_0, \xi|||, |||\mathrm{u}_0', \xi'|||)|||(\mathrm{u}_0, \xi) - (\mathrm{u}_0', \xi')|||.$$

Théorème 4.1. *Soit* $B_4 < \infty$, $T > 0$, $t \in [0,T]$ *et* $\mathrm{u}(t,x)$ *solution de (B), (3.1) avec* $\eta(t,x) = \partial_t \xi(t,x)$, $\xi \in X_4^T$ *et* $\mathrm{u}(0) \in H^1$. *Alors, il existe* $C(T) > 0$ *indépendante de* u_0 *et de* $\nu \in (0,1]$, *telle que pour tout* $\theta \in (0,T]$

$$\sup_{\theta \le t \le T} |\,\mathrm{u}_x^+(t,\cdot)|_\infty \le C\theta^{-1}(1 + ||\xi||_{X_4^T}), \tag{4.1}$$

$$\sup_{\theta \le t \le T} (|\,\mathrm{u}(t,\cdot)|_\infty + |\,\mathrm{u}_x(t,\cdot)|_1) \le C\theta^{-1}(1 + ||\xi||_{X_4^T}). \tag{4.2}$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous supposons que $T = 2$. Supposons d'abord que $\mathrm{u}(0) \in H^4$. Alors, le théorème 3.2 implique que $\mathrm{u} \in X_4^T$. On se propose d'écrire la solution u de (B), (1.3),(3.1) comme

$$\mathrm{u} = \xi + v.$$

Par conséquent, v est solution de

$$v_t + \mathrm{u}\,\mathrm{u}_x - \nu v_{xx} = \nu \xi_{xx}. \tag{4.3}$$

On dérive cette équation par rapport à x et on multiplie par t, on trouve

$$t v_{tx} + t(\mathrm{u}_x^2 + \mathrm{u}\,\mathrm{u}_{xx}) = \nu t v_{xxx} + \nu t \xi_{xxx}. \tag{4.4}$$

On pose $w := t v_x$ et on réécrit (4.4) comme

$$(w_t - v_x) + t\,\mathrm{u}_x^2 + (t\,\mathrm{u}\,\xi_{xx} + \mathrm{u}\,w_x) = \nu w_{xx} + \nu t \xi_{xxx}. \tag{4.5}$$

Maintenant, on considère la fonction $w(t,x)$ sur le cylindre $Q = [0,2] \times \mathbb{S}^1$. Comme $w_{|t=0} = 0$ et $\int w(x)dx = 0$ alors, soit w est identiquement nulle, soit w atteint son maximum $M > 0$ en $(t_1, x_1) \in Q$ avec $t_1 > 0$. Si w est identiquement nulle alors $v_x(t,x) \equiv 0$, et $v(t,x) = 0$ sur Q. D'où (4.1) et (4.2). Maintenant, supposons que w atteint son maximum $M > 0$ en $(t_1, x_1) \in Q$ et notons

$$K := \max(1, \max_{0 \le t \le 2} |\xi(t,\cdot)|_{\mathcal{C}^3(\mathbb{S}^1)}). \tag{4.6}$$

Alors

$$K \le \max(1, C||\xi(t,\cdot)||_{X_4^T}) < \infty, \quad C > 0$$

Démontrons que

$$M \le 9K. \tag{4.7}$$

Par un raisonnement par l'absurde, supposons que $M > 9K$. Comme $\xi, \mathrm{u} \in X_4^T$, on trouve de l'équation (4.5) que $w_t, w_x, w_{xx} \in \mathcal{C}(Q)$ [12]. Alors les conditions d'optimalité impliquent que

$$w_t \ge 0,\ w_x = 0 \text{ et } w_{xx} \le 0 \quad \text{au point } (t_1, x_1). \tag{4.8}$$

Par (4.8) et (4.5), on a au point (t_1, x_1), la relation

$$-v_x + t\,\mathrm{u}_x^2 + t\,\mathrm{u}\,\xi_{xx} \le \nu t \xi_{xxx}.$$

On multiplie cette dernière inégalité par t et en utilisant le fait que $w(t_1, x_1) = M$ et $t^2\,\mathrm{u}_x^2 = (w + t\xi_x)^2$, nous avons au point (t_1, x_1),

$$-\,M + (M + t\xi_x)^2 + t^2\,\mathrm{u}\,\xi_{xx} \le \nu t^2 \xi_{xxx}. \tag{4.9}$$

Comme $t \le 2$, par (4.6) on a

$$|t\partial_{x^j}^j \xi| \le 2K, \quad j = 0, \dots, 3. \tag{4.10}$$

De plus,

$$(M + t\xi_x)^2 \ge (M - 2K)^2, \quad \text{au point } (t_1, x_1), \tag{4.11}$$

car $M > 2K$. De plus, $\int_{\mathbb{S}^1} tv(x)dx = 0$ et $tv_x = w \le M$, alors le lemme 4.1 implique que $|tv| \le M$, ce qui entraîne

$$|t\,\mathrm{u}\,| \le |t\xi| + M \le 2K + M, \quad \forall (t,x) \in Q, \tag{4.12}$$

et

$$|t^2\,\mathrm{u}\,\xi_{xx}| = |(t\,\mathrm{u})(t\xi_{xx})| \le (2K + M)(2K), \quad \forall (t,x) \in Q.$$

Comme $\nu t^2 \xi_{xxx} \leq 4K$, alors en utilisant (4.12), on en déduit que

$$-M + (M-2K)^2 \leq 2K(2K+M) + 4K,$$

Cette dernière relation implique que $M < 6K+2$. Comme $M > 9K$ et $K \geq 1$ alors $6K+2 < 9K$. D'où la contradiction, et (4.7) est établi.

Comme $t\,\mathrm{u}_x = w + t\xi_x$ et $M \leq 9K$, alors pour tout $(t,x) \in Q$, on a $t\,\mathrm{u}_x \leq 11K$. Donc, u satisfait (4.1) si $\mathrm{u}(0) \in H^4$. Encore une fois, le lemme 4.1 implique que

$$t|\,\mathrm{u}\,|_\infty, t|\,\mathrm{u}_x\,|_1 \leq 22K \leq 22(1 + ||\xi||_{X_4^T}),$$

c'est-à-dire, u satisfait (4.2) si $\mathrm{u}(0) \in H^4$.

Maintenant, supposons que $\mathrm{u}(0) \in H^1$ est montrons que la solution $\mathrm{u} \in H^1$ de (B) vérifie bien (4.1) et (4.2). Choisissons une suite $\{\mathrm{u}^j(0)\}_{j\in\mathbb{N}} \in H^4$ qui converge vers u(0) dans H^1. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{u}^j(0)$ définit une solution $\mathrm{u}^j \in H^4$ de (B) qui satisfait (par ce qui précède) (4.1) et (4.2). Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{S}^1$

$$|\,\mathrm{u}_x^+(t,x)| \leq |\,\mathrm{u}_x^+(t,x) - \mathrm{u}_x^{j+}(t,x)| + C(1 + ||\xi||_{X_4^T}), \quad C > 0. \tag{4.13}$$

Par le théorème 3.3 avec $m = 1$,

$$\mathrm{u}^j(t,\cdot) \to \mathrm{u}(t,\cdot) \text{ dans } H^1. \tag{4.14}$$

D'ici $\{\mathrm{u}_x^j(t,x)\}$ converge (à extraction d'une sous-suite) vers $\mathrm{u}_x(t,x)$ p.p en x. En passant à la limite dans (4.13) quand $j \to +\infty$ nous obtenons que $|\,\mathrm{u}_x^+(t,x)| \leq C(1 + ||\xi||_{X_4^T})$ p.p, et (4.1) est vérifiée.

La convergence (4.14) et le fait que (4.2) est vrai pour u^j implique que (4.2) reste vrai pour u. □

Par le théorème 2.2 et le théorème 4.1, nous avons immédiatement le :

Corollaire 4.1. *Si $B_4 < \infty$ et $\mathrm{u}(0) \in H^1$, alors pour tout $p \geq 1$ et $0 < \theta \leq T$, il existe $C(p,T,B_4) > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[\sup_{\theta \leq t \leq T} |\,\mathrm{u}_x^+(t,\cdot)|_\infty^p] \leq C\theta^{-p},$$
$$\mathbb{E}[\sup_{\theta \leq t \leq T} (|\,\mathrm{u}(t,\cdot)|_\infty^p + |\,\mathrm{u}_x(t,\cdot)|_1^p)] \leq C\theta^{-p}.$$

5. Loi de la solution u et les deux semi groupes de Markov

Soit $(X, \mathcal{B}_X)$ et $(Y, \mathcal{B}_Y)$ deux espaces mesurables. Par exemple, X et Y sont deux sous-ensembles fermés d'espaces de Banach, munis de leurs tribus Boréliennes [28]. Soit $F : X \to Y$ une application mesurable. Notons par $\mathcal{P}(X, \mathcal{B}_X)$ (resp. $\mathcal{P}(Y, \mathcal{B}_Y)$) l'espace des mesures de probabilités sur $(X, \mathcal{B}_X)$ (resp. $(Y, \mathcal{B}_Y)$). Rappelons [28] que F définit l'application

$$F_* : \mathcal{P}(X, \mathcal{B}_X) \to \mathcal{P}(Y, \mathcal{B}_Y), \quad m \longmapsto F \circ m,$$

où pour tout $Q \in \mathcal{B}_Y$: $(F \circ m)(Q) = m(F^{-1}(Q))$. L'application F_* est linéaire dans le sens où :

$$F_*(am_1 + (1-a)m_2) = aF_*(m_1) + (1-a)F_*(m_2), \tag{5.1}$$

pour tout $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, \mathcal{B}_X)$ et $a \in [0,1]$.

Lemme 5.1. [28] *Soient X et Y deux espaces de Banach séparables et $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Alors, il existe une variable aléatoire $\varsigma : \Omega \to X$ telle que sa loi, notée $\mathcal{D}(\varsigma)$, est égale à μ. De plus, si $F : X \to Y$ est une application mesurable, alors $F \circ \mu = \mathcal{D}(F \circ \varsigma)$.*

Soit $m \geq 0$. On munit l'espace de Banach séparable X_m^T de sa tribu Borélienne $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{X_m^T}$. On note par $\mathcal{P}(X_m^T)$ l'espace des mesures de probabilité Boréliennes sur $(X_m^T, \mathcal{B})$, et par $\mathcal{C}_b(X_m^T)$ l'espace des fonctions continues et bornées sur X_m^T muni de la norme de convergence uniforme [11]. On rappelle (théorème 2.2) que si $B_m < \infty$, $m \geq 1$, alors ξ^ω définit une variable aléatoire

$\xi : \Omega \to X_m^T$. Sa loi, notée $\mathcal{D}(\xi^\omega)$, est la mesure $\pi = \xi \circ \mathbb{P}$, c'est-à-dire, la mesure telle que pour tout $Q \in \mathcal{B}(X_m^T) : \pi(Q) = \mathbb{P}\{\omega : \xi^\omega \in Q\}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(X_m^T)$, on a

$$\langle f, \pi \rangle := \int_{X_m^T} f(\xi)\pi(d\xi) = \int_\Omega f(\xi^\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[f(\xi^\omega)],$$

(voir [28]). Soit $f \in (X_m^T)^*$, c'est-à-dire, f est une forme linéaire continue sur X_m^T. Comme les processus $\{\beta_s\}$ sont indépendants, alors

$$f \circ \pi = \mathcal{D}\left(f\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^*} b_s \beta_s^\omega(t) e_s(x)\right)\right) = \mathcal{D}\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}^*} b_s f(\beta_s^\omega(t) e_s(x))\right) = \pi_1 \star \pi_2 \star \cdots .$$

Ici $\pi_j = \mathcal{D}\left(b_j f(e_j \beta_j^\omega)\right)$ et $\star$ est la convolution des mesures. Comme les π_j sont des mesures Gaussiennes alors $f \circ \pi$ l'est aussi [28]. C'est à dire, π est une mesure Gaussienne dans l'espace de Banach X_m^T [6], [20]. Comme π_j dépend seulement de f, b_s et de la loi de β_s^ω alors

$$\pi \text{ dépend seulement de la suite } \{b_k, k \in \mathbb{Z}^*\}. \tag{5.2}$$

Notons qu'on peut obtenir (2.9) comme conséquence du célèbre théorème de *Fernique* qui affirme que si μ est une mesure Gaussienne dans un espace de Banach X, alors il existe un réel positif α tel que

$$\int_X e^{(\alpha||x||_X)}\mu(dx) < \infty \text{ (voir [6], [20]).}$$

Soit $B_m < \infty$, $m \geq 1$. Considérons le problème de Cauchy (B), (1.3), (3.1). Soit $m_0 \in \mathcal{P}(H^m)$ et $\mathrm{u}_0^\omega \in H^m$ une variable aléatoire indépendante de ξ^ω, telle que $\mathcal{D}(\mathrm{u}_0^\omega) = m_0$ (lemme 5.1). Alors

$$\mathcal{P}(H^m \times X_m^T) \ni \mathcal{D}(\mathrm{u}_0^\omega, \xi^\omega) = m_0 \times \mathcal{D}(\xi^\omega).$$

On note dans la suite $\mathcal{D}(\xi^\omega)$ par π. On supposera π fixé et on étudie la dépendance de la loi de la solution $\mathrm{u}^\omega(t,x)$ du problème de Cauchy par rapport à m_0. On désigne par $\mathrm{u}^\omega(t;\mathrm{u}_0^\omega)$ la solution issue de u_0^ω à l'instant t, et on construit l'application S_t^* définie par :

$$S_t^* : \mathcal{P}(H^m) \to \mathcal{P}(H^m), \quad m_0 \mapsto \mathcal{M}_t \circ (m_0 \times \pi) := \mathcal{D}(\mathrm{u}^\omega(t;\mathrm{u}_0^\omega)),$$

(cf. théorème 3.3 et (3.17)). L'application S_t^* est linéaire (cf. (5.1)).

Lemme 5.2. *Soient* $\widetilde{\mathrm{u}}^\omega$ *une solution de (B) avec* $\widetilde{\eta}^\omega = \partial_t \widetilde{\xi}^\omega$, $\widetilde{\xi}^\omega(t,x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} b_s \widetilde{\beta}_s^\omega(t) e_s(x)$, *et* $\{\widetilde{\beta}_s^\omega(t),\ s \in \mathbb{Z}^*\}$ *sont des processus de Wiener standard indépendants. Soit* $\widetilde{\mathrm{u}}^\omega(0) = \widetilde{\mathrm{u}}_0^\omega \in H^m$ *une variable aléatoire indépendante de* $\widetilde{\xi}^\omega$ *telle que* $\mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{u}}_0^\omega) = m_0$. *Alors* $\mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{u}}(t)) = S_t^*(m_0)$, *pour tout* $t \in (0,T)$.

Démonstration. Par le théorème 3.3, nous avons $\widetilde{\mathrm{u}}^\omega(t) = \mathcal{M}_t(\widetilde{\mathrm{u}}_0^\omega, \widetilde{\xi}^\omega)$, et par le lemme 5.1, nous obtenons que $\mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{u}}(t)) = \mathcal{M}_t \circ \mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{u}}_0^\omega, \widetilde{\xi}^\omega)$. Étant donné (5.2) et comme $\widetilde{\mathrm{u}}_0^\omega$ est indépendante de $\widetilde{\xi}^\omega$, alors

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{u}}_0^\omega, \widetilde{\xi}^\omega) = \mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{u}}_0^\omega) \times \mathcal{D}(\widetilde{\xi}^\omega) = m_0 \times \pi.$$

Donc, $\mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{u}}(t)) = \mathcal{M}_t \circ (m_0 \times \pi) = S_t^*(m_0)$. □

Si $\mathrm{u}_0 := v \in H^m$ est indépendante de ω, alors $\mathcal{D}(\mathrm{u}_0) = \delta_v \in \mathcal{P}(H^m)$ est la mesure de Dirac et $S_t^*(\delta_v) = \mathcal{D}(\mathrm{u}(t;v))$. On considère l'application

$$\Sigma : \mathbb{R}^+ \times H^m \to \mathcal{P}(H^m), \quad (t,v) \mapsto S_t^*(\delta_v) = \mathcal{D}(\mathrm{u}(t;v)) = \Sigma_t(v).$$

Elle est appelée : *la fonction de transition de Markov.*

Théorème 5.1. $S_0^* = Id$ *et pour tout* $t_1, t_2 \geq 0$:

$$S_{t_1}^* \circ S_{t_2}^* = S_{t_1+t_2}^*. \tag{5.3}$$

On dit que $\{S_t^*\}_{t\geq 0}$ est *le semi groupe de Markov dans* $\mathcal{P}(H^m)$ de l'équation (B).

Démonstration. La première affirmation est évidente. Pour démontrer la dernière, on fixe $t_1, t_2 \geq 0$ et on pose $\mu_i := \mathcal{D}(\mathrm{u}^\omega(t_i; \mathrm{u}_0^\omega))$ pour $i = 1, 2$. Notons $v(t,x) = u(t_1 + t; \mathrm{u}_0^\omega)$. Alors v vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v_t + vv_x - \nu v_{xx} = \widetilde{\eta}^\omega, \\ v(0,x) = v_0, \end{cases}$$

où $\widetilde{\eta}^\omega(t,x) = \eta^\omega(t_1 + t, x)$ et $v_0 = \mathrm{u}(t_1; \mathrm{u}_0^\omega)$. C'est à dire,

$$\widetilde{\eta}^\omega(t,x) = \partial_t(\xi^\omega(t_1 + t, x)) = \partial_t(\xi^\omega(t_1 + t, x) - \xi^\omega(t_1, x)) := \partial_t(\widetilde{\xi}^\omega(t,x)).$$

et

$$\widetilde{\xi}^\omega(t,x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s(\beta_s^\omega(t + t_1) - \beta_s^\omega(t_1)) e_s(x).$$

Comme $\{\beta_s^\omega\}$ sont des processus de Wiener standards indépendants alors $\{\beta_s^\omega(t+t_1) - \beta_s^\omega(t_1)\}$ l'est aussi (appendice A). Ainsi, nous avons que $\mathcal{D}(\widetilde{\xi}^\omega) = \mathcal{D}(\xi^\omega)$. La variable aléatoire $v_0^\omega = \mathrm{u}(t_1, \mathrm{u}_0^\omega)$ ne dépend que de u_0^ω et $(\xi^\omega(t), 0 \leq t \leq t_1)$. Par conséquent, elle est indépendante des incréments $(\xi^\omega(t_1 + t) - \xi^\omega(t_1), t \geq 0)$ (qui sont indépendants de u_0^ω et des $(\xi^\omega(t), 0 \leq t \leq t_1)$). Donc, par le lemme 5.2, on a que

$$\mathcal{D}(v(t_2)) = S_{t_2}^*(\mu_1) = S_{t_2}^* \circ S_{t_1}^*(m_0).$$

Comme $\mathcal{D}(v(t_2)) = \mathcal{D}(\mathrm{u}(t_1 + t_2); \mathrm{u}_0) = S_{t_1+t_2}^*(\mu_1)$, alors nous obtenons (5.3). □

Notons par $L_b(H^m)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur H^m, et pour tout $t \geq 0$, considérons l'application $S_t : \mathcal{C}_b(H^m) \to L_b(H^m)$ définie par

$$S_t f\,(v) := \mathbb{E}[f(\mathrm{u}(t; v)], \quad f \in \mathcal{C}_b(H^m),\ v \in H^m. \tag{5.4}$$

Par définition de S_t, on a

$$S_t f\,(v) = \langle f, \mathcal{D}(\mathrm{u}(t; v)) \rangle = \langle f, \mathcal{M}_t \circ (\delta_v \times \pi) \rangle = \langle f, \Sigma_t(v)) \rangle. \tag{5.5}$$

Théorème 5.2. *Soit $m \geq 1$ et $t \geq 0$. Alors*

(1) $S_t(\mathcal{C}_b(H^m)) \subset \mathcal{C}_b(H^m)$.

(2) *L'application S_t est linéaire et positive.*

(3) *L'application $S_t : \mathcal{C}_b(H^m) \to \mathcal{C}_b(H^m)$ est continue et sa norme est égale à 1.*

(4) *Pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ et μ dans $\mathcal{P}(H^m)$ nous avons que*

$$\langle S_t f, \mu \rangle = \langle f, S_t^*(\mu) \rangle. \tag{5.6}$$

Démonstration. 1) Si $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ alors par (5.4) :

$$S_t f(v) = \mathbb{E}[f(\mathrm{u}(t; v)] = \mathbb{E}[f \circ \mathcal{M}_t(v, \xi^\omega)].$$

Si $v_n \to v$ dans H^m alors pour chaque ω, $f \circ \mathcal{M}_t(v_n, \xi^\omega) \to f \circ \mathcal{M}_t(v, \xi^\omega)$ dans H^m (car $f \circ \mathcal{M}_t$ est continue). Alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue : $S_t f(v_n) \to S_t f(v)$, donc $S_t f \in \mathcal{C}_b(H^m)$.

2) La linéarité et la positivité de S_t sont évidentes.

3) La relation $S_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}(u) = 1$ pour tout u est triviale. Soit f dans $\mathcal{C}_b(H^m)$ et notons par $d = ||f||$. Alors

$$-d\mathbf{1} \leq f \leq d\mathbf{1}.$$

En utilisant la positivité de S_t et cette relation nous avons que $-d\mathbf{1} \leq S_t f \leq d\mathbf{1}$, d'ici $||S_t f|| \leq ||f||$. Donc $|S_t|_{\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_b} \leq 1$, et S_t est continue. Finalement, comme $S_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ alors $|S_t|_{\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_b} = 1$.

3) Nous avons

$$\langle f, S_t^*(\mu) \rangle = \langle f, \mathcal{M}_t \circ (\mu \times \pi) \rangle = \langle f \circ \mathcal{M}_t, \mu \times \pi \rangle.$$

Puis par le théorème de Fubini :

$$\langle f \circ \mathcal{M}_t, \mu \times \pi \rangle = \int_{H^m} \underbrace{\int_{H^m} (f \circ \mathcal{M}_t)(v, \xi) \pi(d\xi)}_{(S_t f)v} \mu(dv) = \langle S_t f, \mu \rangle.$$

□

On démontre dans ce qui suit que la famille d'opérateurs $\{S_t, t \geq 0\}$ forment un semi groupe.

Théorème 5.3. *Nous avons $S_0 = Id$ et pour tout $t_1, t_2 \geq 0$*

$$S_{t_1} \circ S_{t_2} = S_{t_1+t_2}. \tag{5.7}$$

On dit que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est *le semi groupe de Markov dans $\mathcal{C}_b(H^m)$* de l'équation (B).

Démonstration. Soit $t_1, t_2 > 0$, $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ et $v \in H^m$. Par le théorème 5.2, on a $(S_{t_1+t_2} f)v = \langle f, S^*_{t_1+t_2}(\delta_v)\rangle$ et par le théorème 5.1 $\langle f, S^*_{t_1+t_2}(\delta_v)\rangle = \langle f, S^*_{t_1} \circ S^*_{t_2}(\delta_v)\rangle$. Encore une fois par le théorème 5.2 $\langle f, S^*_{t_1} \circ S^*_{t_2}(\delta_v)\rangle = \langle S_{t_1} f, S^*_{t_2}(\delta_v)\rangle = \langle S_{t_2} \circ S_{t_1} f, \delta_v\rangle$. Finalement $(S_{t_1+t_2} f)v = (S_{t_2} \circ S_{t_1} f)v$. □

Théorème 5.4. *(Relation de Kolmogorov-Chapman)*
Pour tout $t_1, t_2 \geq 0$, $m \geq 1$ et $v \in H^m$, on a

$$\Sigma_{t_1+t_2}(v) = \int (\Sigma_{t_2}(u))\, \Sigma_{t_1}(v)\, (du)\,. \tag{5.8}$$

Ici, l'intégrale de droite est l'intégrale de la fonction $u \longmapsto \Sigma_{t_2}(u) \in \mathcal{P}(H^m)$ par rapport à la mesure $\Sigma_{t_1}(v)$ [9]*. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$:*

$$S_{t_1+t_2} f(v) = \langle \Sigma_{t_1+t_2}(v), f\rangle = \int \langle \Sigma_{t_2}(u), f\rangle \Sigma_{t_1}(v)(du). \tag{5.9}$$

Démonstration. L'intégrale à droite de (5.9) est égale à $\int S_{t_2} f(u) \Sigma_{t_1}(v)(du) = (S_{t_1} \circ S_{t_2} f)(v)$. Alors, (5.9) est une conséquence de (5.7). Comme les termes à gauche et à droite de (5.9) sont les intégrales d'une fonction arbitraire $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ par rapport aux deux mesures définies dans (5.8), alors (5.8) est une conséquence de (5.9). □

Le théorème 5.4 peut être généralisé :

Proposition 5.1. *Pour tout $t_1, t_2 \geq 0$, $m \geq 1$ et $v \in H^m$, si $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ et Φ est une fonction bornée et mesurable sur $X^{t_1}_m$, alors*

$$\mathbb{E}[\Phi(\mathrm{u}(\tau; v)_{|\tau\in[0,t_1]}) f(\mathrm{u}(t_1 + t_2; v))] = \mathbb{E}[\Phi(\mathrm{u}(\tau; v)_{|\tau\in[0,t_1]})\langle \Sigma_{t_2}(\mathrm{u}(t_1; v)), f\rangle]. \tag{5.10}$$

Notons que (5.10) est égale à (5.9) si $\Phi \equiv 1$.

Démonstration. Nous raisonnons comme dans la démonstration du théorème 5.1. Considérons des espaces de probabilité $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2$, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, , \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$. Soit $\{\beta^{\omega_i}_s$, $s \in \mathbb{Z}^*\}$, $i = 1, 2$, des processus de Wiener standard indépendants définies sur $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2$. Pour $t_1, t_2 \geq 0$ et $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, on pose :

$$\beta^{\omega}_s(t) = \begin{cases} \beta^{\omega_1}_s(t), \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \beta^{\omega_1}_s(t_1) + \beta^{\omega_2}_s(t - t_1), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

qui sont des processus de Wiener standard indépendants. On choisit cette forme de $\{\beta^{\omega}_s,\ s \in \mathbb{Z}^*\}$ pour la force ξ (voir (1.3)). Dans ce cas, pour $0 \leq t \leq t_1$, la solution $\mathrm{u}^{\omega}(t; v) = \mathrm{u}^{\omega_1}(t; v)$ ne dépend pas de ω_2, et pour $t_1 \leq t \leq t_2$, l'équation pour $\mathrm{u}^{\omega}(t; v)$ dépend seulement de ω_2. Donc,

$$\mathrm{u}^{\omega}(t_1 + t; v) = \mathrm{u}^{\omega_2}(t; \mathrm{u}^{\omega_1}(t_1; v)),$$

et l'intégrale à gauche de (5.10) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \Phi(\mathrm{u}^{\omega}(\tau; v)_{|\tau\in[0,t_1]}) f(\mathrm{u}^{\omega}(t_1 + t_2; v)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \Phi(\mathrm{u}^{\omega_1}(\tau; v)_{|\tau\in[0,t_1]}) f(\mathrm{u}^{\omega_1,\omega_2}(t_1 + t_2; v)\mathbb{P}_1(d\omega_1)\mathbb{P}_2(d\omega_2) \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\mathrm{u}^{\omega_2}(t_2; \mathrm{u}^{\omega_1}(t_1; v))\mathbb{P}_2(d\omega_2)\right) \Phi(\mathrm{u}^{\omega_1}(\tau; v)_{|\tau\in[0,t_1]})\mathbb{P}_1(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega} \langle \Sigma_{t_2}(\mathrm{u}(t_1; v)), f\rangle \Phi(\mathrm{u}^{\omega}(\tau; v)_{|\tau\in[0,t_1]})\mathbb{P}(d\omega).
\end{aligned}$$

Et (5.10) est vérifié. □

Le théorème 5.1 et (5.9) impliquent que pour $0 < t_1 < t_1 + t_2$ et pour chaque donnée initiale u_0^ω indépendante de la force η^ω de la forme (1.3), la loi de la solution $\mathrm{u}(t_1+t_2;\mathrm{u}_0)$ est une fonction qui dépend seulement de la loi de $\mathrm{u}(t_1;\mathrm{u}_0)$. On appelle cela : *la propriété de Markov.* C'est la raison pour laquelle il est plus facile d'étudier l'équation de Burgers stochastique avec une force η^ω qui est un bruit blanc plutôt qu'avec une autre force aléatoire.

6. Convergence faible de mesures

On rappelle ici quelques résultats sur la notion de convergence faible de mesures [3], [11], [28]. Soit X un espace de Banach séparable, $O_X \subset X$ un fermé (par exemple, $O_X = X$). On note

$$L(O_X) := \{f \in \mathcal{C}_b(O_X) : Lip(f) < \infty\},$$

où $Lip(f)$ désigne la constante de Lipschitz de f. L'espace $L(O_X)$ muni de la norme

$$||f||_L = ||f||_{L(X)} := ||f|| + Lip(f)$$

est un espace de Banach non séparable [11],[23].

Définition 6.1. *On dit qu'une suite $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(O_X)$ converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{P}(O_X)$, et on note $\mu_n \rightharpoonup \mu$, si et seulement si*

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(O_X) : \langle \mu_n, f\rangle \to \langle \mu, f\rangle.$$

La convergence $\mu_n \rightharpoonup \mu$ n'implique pas la convergence de $\mu_n(Q)$ vers $\mu(Q)$, $Q \in \mathcal{B}(O_X)$. Pourtant

$$\mu_n(Q) \geq \lim_{n\to+\infty} \sup \mu_n(Q), \text{ si } Q \text{ est fermé et } \mu_n \rightharpoonup \mu \text{ (voir [3], [11], [28]).} \tag{6.1}$$

Définition 6.2. *Si μ et ν sont des éléments de $\mathcal{P}(O_X)$, alors la distance Lipschitz-duale (ou Lip-duale) entre μ et ν est définie par*

$$||\mu - \nu||^*_{L(X)} := \sup_{||f||_{L(X)}\leq 1} (\langle f, \mu\rangle - \langle f, \nu\rangle).$$

Le théorème suivant dû à Kantorovitch caractérise la convergence faible de mesures par la distance Lipschitz-duale [11].

Théorème 6.1. *Soit X un espace de Banach séparable, $O_X \subset X$ un fermé. Alors*

(1) *$(\mathcal{P}(O_X), ||\cdot||^*_{L(X)})$ est un espace métrique complet.*
(2) *Si $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(O_X)$ et $\mu \in \mathcal{P}(O_X)$ alors*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \Longleftrightarrow ||\mu_n - \mu||^*_{L(X)} \to 0.$$

Théorème 6.2. *Pour tout $t \geq 0$ et $m \geq 1$, l'application $S_t^* : \mathcal{P}(H^m) \to \mathcal{P}(H^m)$ est faiblement continue, c'est-à-dire, si $\mu_n \rightharpoonup \mu$ alors $S_t^*\mu_n \rightharpoonup S_t^*\mu$.*

Démonstration. Soit $\mu_n \rightharpoonup \mu$ et $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$. On a par (5.6) : $\langle S_t^*\mu_n, f\rangle = \langle \mu_n, S_t f\rangle$ et $\langle S_t^*\mu, f\rangle = \langle \mu, S_t f\rangle$. Comme $S_t f \in \mathcal{C}_b(H^m)$, on a $\langle \mu_n, S_t f\rangle \to \langle \mu, S_t f\rangle$. Donc, $S_t^*\mu_n \rightharpoonup S_t^*\mu$. □

Définition 6.3. *Soit M un ensemble de mesures de $\mathcal{P}(O_X)$.*

(1) *M est dit tendu, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset O_X$ tel que*

$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \epsilon, \quad \forall \mu \in M.$$

(2) *M est dit faiblement relativement compact, si toute suite $\{\mu_n\} \subset M$ admet une sous-suite faiblement convergente dans $\mathcal{P}(O_X)$.*

Le théorème suivant dû à Prokhorov caractérise les ensembles de mesures faiblement relativement compact [3], [11], [28].

Théorème 6.3. *Un ensemble de mesures $M \subset \mathcal{P}(O_X)$ est tendu si et seulement si M est faiblement relativement compact.*

7. Bornes supérieures pour les normes Sobolev de u

Dans la suite nous supposerons toujours que $B_4 < \infty$.

Le but de cette section est d'estimer l'espérance mathématique des normes $\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(t)||_m^2]$, $m \geq 1$, de la solution $\mathrm{u}(t)$ de (B) uniformément en $\nu \in (0,1]$ et en $\mathrm{u}_0 \in H^1$.

On se donne $\mathrm{u} \in X_m^T$ solution de (B), et on rappelle brièvement la formule d'Itô [14], [17], [26]. Soit f une fonction sur H^m de classe $\mathcal{C}^2$. Alors la formule d'Itô implique que [3]

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[f(\mathrm{u}(t))] = \mathbb{E}\left[df(\mathrm{u}(t))L(\mathrm{u}(t)) + \frac{1}{2}\sum_{s\in\mathbb{Z}^*} b_s^2 d^2 f(\mathrm{u}(t))(e_s, e_s)\right], \tag{7.1}$$

où $L(\mathrm{u}) = \nu\,\mathrm{u}_{xx} - \mathrm{u}\,\mathrm{u}_x$. La relation (7.1) est une égalité formelle. Elle devient une affirmation rigoureuse si on suppose des restrictions sur f [23, Appendix A7]. Nous discuterons cela plus tard.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on note par $\lceil x \rceil$ la partie entière par excès de x :

$$\lceil x \rceil = \min\{l \in \mathbb{N} : l \geq x\}.$$

Théorème 7.1. *Soit $T > \theta > 0$, $m \geq 1$ et $\nu \in (0,1]$. Si $B_{\lceil m \rceil} < \infty$, alors il existe $C_m(\theta, B_{\lceil m \rceil}, B_4) > 0$ telle que pour tout $\mathrm{u}_0 \in H^1$, la solution u de (B), (1.3), (3.1) satisfait*

$$\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(t)||_m^2] \leq C_m \nu^{-(2m-1)}, \quad \forall \theta \leq t \leq T. \tag{7.2}$$

Démonstration. Par C_{mj}, $c_m^{'}$, C'_{mj}, ... etc, nous notons des constantes positives qui ne dépendent que de m, θ, B_4 et $B_{\lceil m \rceil}$. On supposera d'abord que $m \in \mathbb{N}^*$.

i) En premier lieu, nous présentons une preuve basée sur une application formelle de la formule (7.1) et nous expliquerons plus tard comment convertir cet argument en une preuve rigoureuse. Supposons d'abord que $\mathrm{u}_0 \in H^m$, alors la solution $\mathrm{u} = \mathrm{u}^\omega \in X_m^T$ (cf. théorème 3.2) pour chaque ω.

On applique (7.1) à la fonction $f(\mathrm{u}) = ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 = \langle(-\Delta)^m \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle$. On a $df(\mathrm{u})v = 2\langle(-\Delta)^m u, v\rangle$ et $d^2 f(\mathrm{u})(e_s, e_s) = 2\langle(-\Delta)^m e_s, e_s\rangle = (2\pi s)^{2m}\langle e_s, e_s\rangle = (2\pi s)^{2m}$, donc (7.1) s'écrit comme

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}\,||_m^2] = -\mathbb{E}[\langle(-\Delta)^m \mathrm{u}, \partial_x \mathrm{u}^2\rangle] - 2\nu\mathbb{E}[\langle(-\Delta)^m \mathrm{u}, (-\Delta)\,\mathrm{u}\rangle] + B_m^{'}, \tag{7.3}$$

où $B_m^{'} = (2\pi)^{2m} B_m = \sum\limits_{s\in\mathbb{Z}^*} b_s^2 (2\pi s)^{2m}$.

Par le lemme 3.3 (avec $q = \infty$), et le fait que $|\,\mathrm{u}\,|_\infty \leq |\,\mathrm{u}_x\,|_1$, nous avons

$$|\mathbb{E}[\langle(-\Delta)^m \mathrm{u}, \partial_x \mathrm{u}^2\rangle]| \leq C_m \mathbb{E}[||\,\mathrm{u}\,||_{m+1}^{\alpha+1} |\,\mathrm{u}_x\,|_1^{2-\alpha}], \quad \alpha = \frac{2m-1}{2m+1}. \tag{7.4}$$

L'inégalité de Hölder appliquée au membre à droite avec $p = \frac{2m+1}{2m}$, et le corollaire 4.1 impliquent que pour tout $\theta' := \frac{\theta}{2} \leq t \leq T$:

$$\mathbb{E}[|\,\mathrm{u}_x\,|_1^{2-\alpha} ||\,\mathrm{u}\,||_{m+1}^{\alpha+1}] \leq \left(\mathbb{E}[|\,\mathrm{u}_x\,|_1^{(2-\alpha)q_m}]\right)^{\frac{1}{q_m}} \left(\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}\,||_{m+1}^2]\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_m \left(\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}\,||_{m+1}^2]\right)^{\frac{2m}{2m+1}}.$$

On pose $X_j(t) = \mathbb{E}[||\,\mathrm{u}\,||_j^2]$, $j \in \mathbb{N}^*$. D'après les estimations précédentes, la relation (7.3) s'écrit

$$\frac{d}{dt}X_m(t) \leq B_m^{'} - 2\nu X_{m+1}(t) + C_m X_{m+1}(t)^{\frac{2m}{2m+1}}, \quad \theta' \leq t \leq T. \tag{7.5}$$

Comme précédemment, l'inégalité (3.2) (avec $\theta(m, \infty, 2, m+1)$), celle de Hölder et le corollaire 4.1 impliquent que :

$$X_m(t) \leq C_{m1} X_{m+1}(t)^{\frac{2m-1}{2m+1}} \left(\mathbb{E}[|\,\mathrm{u}_x\,|_1^a]\right)^b \leq C_{m2} X_{m+1}(t)^{\frac{2m-1}{2m+1}},$$

pour des constantes convenables $a, b > 0$, si $\theta' \leq t \leq T$. Alors

$$X_{m+1}(t) \geq C_{m3} X_m(t)^{\frac{2m+1}{2m-1}}, \quad \theta' \leq t \leq T. \tag{7.6}$$

La relation (7.5) s'écrit pour tout $\theta' \leq t \leq T$:

$$\frac{d}{dt}X_m(t) \leq B_m^{'} - X_{m+1}(t)^{\frac{2m}{2m+1}} \left(2\nu X_{m+1}(t)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m\right). \tag{7.7}$$

3. Dans le sens où la relation (7.1) est l'espérance de la formule d'Itô.

Fixons $\beta > 1$ et supposons que

$$\exists t_* \in (2\theta', T] \text{ tel que } X_m(t_*) > \beta\nu^{-(2m-1)} =: Y. \tag{7.8}$$

Soit $s = t_* - t$, $s \in [0, t_*]$. Alors, nous avons de (7.7) :

$$\frac{d}{ds}X_m(s) \geq -B_m' + X_{m+1}(s)^{\frac{2m}{2m+1}}\left(2\nu X_{m+1}(s)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m\right). \tag{7.9}$$

Si $X_m(s) > Y$, alors par (7.6)

$$\begin{aligned} 2\nu X_{m+1}(s)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m &\geq 2\nu\left(C_{m3}X_m(s)^{\frac{2m+1}{2m-1}}\right)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m \\ &\geq 2C_{m3}^{\frac{1}{2m+1}}\beta^{\frac{1}{2m-1}} - C_m := K_m(\beta). \end{aligned}$$

Choisissons $\beta_0 \gg 1$ telle que $K_m(\beta) > 1$ pour tout $\beta > \beta_0$. Alors, d'après (7.6) et (7.9), si $X_m(s) > Y$ on déduit que

$$\frac{d}{dt}X_m(s) \geq -B_m' + X_{m+1}(s)^{\frac{2m}{2m+1}}K_m(\beta) \geq -B_m' + C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}}X_m(s)^{\frac{2m}{2m-1}}K_m(\beta) > 0, \tag{7.10}$$

où la dernière inégalité est valide si $\beta_0 \gg 1$. D'après (7.8) et (7.10), nous obtenons que

$$\text{la fonction } s \longmapsto X_m(s) \text{ est croissante sur } [0, t_*] \text{ et est minorée par } Y. \tag{7.11}$$

En effet, supposons que la fonction n'est pas minorée par Y partout, et trouvons le premier temps s_1 tel que que $X_m(s_1) = Y$. Par (7.8), $s_1 > 0$. Donc $\frac{d}{ds}X_m(s)_{|s=s_1} \leq 0$, et ceci contredit (7.10). Comme $X_m > Y$, alors $s \longmapsto X_m(s)$ est croissante par (7.10).

Par (7.11), (7.9) et (7.10), nous avons pour tout $s \in [0, t_*]$:

$$\frac{d}{dt}X_m(s) \geq -B_m' + C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}}X_m(s)^{\frac{2m}{2m-1}}K_m(\beta) \geq \frac{1}{2}C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}}X_m(s)^{\frac{2m}{2m-1}}K_m(\beta),$$

si $\beta_0 \gg 1$. Cette dernière inégalité implique que

$$\frac{d}{dt}\left(X_m(s)^{\frac{-1}{2m-1}}\right) \leq -\frac{C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}}}{2(2m-1)}K_m(\beta) =: -C_{m4}K_m(\beta).$$

En intégrant cette dernière relation en temps entre 0 et s et en utilisant (7.11), on a

$$X_m(s)^{\frac{-1}{2m-1}} \leq -C_{m4}K_m(\beta)s + X_m(0)^{\frac{-1}{2m-1}} \leq -C_{m4}K_m(\beta)s + \beta^{\frac{-1}{2m-1}}\nu.$$

Comme $\nu \leq 1$, nous pouvons trouver un $s' \in (0, t_*]$ tel que $X_m(s')^{\frac{-1}{2m-1}} = 0$, si $\beta_0 \gg 1$. D'où la contradiction, car $X_m(s')^{\frac{-1}{2m-1}} > 0$. Donc, (7.8) est fausse si β est suffisamment grand. Ainsi, nous obtenons (7.2) avec $C_m = \beta$, si $\mathrm{u}_0 \in H^m$.

ii) Supposons que $\mathrm{u}_0 \in H^1$. Alors il existe une suite $\{\mathrm{u}_0^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H^m$ qui converge fortement vers u_0 dans H^1. Par le théorème 3.3, pour chaque ω, la solution $\mathrm{u}(t, \mathrm{u}_0^j)$ converge fortement dans H^1 vers la solution $\mathrm{u}(t; \mathrm{u}_0)$ pour tout $0 \leq t \leq T$. Par i), la relation (7.2) est déjà vérifiée pour les solutions $\mathrm{u}(t, \mathrm{u}_0^j)$. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons par Π_N le *projecteur de Galerkin* tel que

$$\Pi_N(\mathrm{u}(x)) = \sum_{|s|\leq N} u_s e_s(x),$$

et considérons la fonction $f_N(\mathrm{u}) = f\left(\Pi_N(\mathrm{u}(x))\right) \wedge N$, $f(\mathrm{u}) = ||\,\mathrm{u}\,||_m^2$. Alors :

a) $f_N \in \mathcal{C}_b(H^1)$ et $f_N \geq 0$,

b) $f_N(\mathrm{u}) \underset{N\to+\infty}{\to} f(\mathrm{u}) \leq \infty$, pour tout $\mathrm{u} \in H^1$.

Par i), a) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\mathbb{E}[f_N(\mathrm{u}(t; \mathrm{u}_0)] = \lim_{j\to+\infty}[f_N(\mathrm{u}(t; \mathrm{u}_0^j))] \leq c_m'\nu^{-(2m-1)}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

En utilisant cette relation et le lemme de Fatou, nous obtenons

$$\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(t; \mathrm{u}_0)||_m^2] \leq \lim_N \inf \mathbb{E}[f_N(\mathrm{u}(t; \mathrm{u}_0)] \leq c_m'\nu^{-(2m-1)}.$$

iii) La démonstration du théorème est finie, si $m \in \mathbb{N}^*$. Maintenant, on suppose que $m \geq 1$ et $m \notin \mathbb{N}^*$. Alors, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et $s \in (0,1)$ tels que $m = j + s$ et $\lceil m \rceil = j+1$. Par l'inégalité d'interpolation et celle de Hölder, nous avons

$$\mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}\,||_m^2\right] \leq \mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}\,||_{j+1}^2\right]^s \mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}\,||_j^2\right]^{1-s}.$$

Comme (7.2) est établie pour $m = j$ et $m = j+1$, alors le terme de droite de cette inégalité est majoré par $C_m \nu^{-((2[j+1]-1)s+[2j-1][1-s])} = C_m \nu^{-(2m-1)}$.

iv) Il reste à justifier l'application de la formule de Itô (7.1). D'abord, soit $\mathrm{u}_0 \in H^{m+2}$ et $B_{m+2} < \infty$. Soient $\{\mathrm{u}^N,\, N \geq 1\}$ les approximations de Galerkin pour u. Elles convergent faiblement vers u dans l'espace X_{m+2}^T et fortement dans X_{m+1}^T, pour tout ω (cf. preuve du théorème 3.1). Considérons l'équation satisfaite par u^N :

$$\partial_t \mathrm{u}^N + \Pi_N \left(\mathrm{u}^N \mathrm{u}_x^N\right) - \nu\, \mathrm{u}_{xx}^N = \partial_t \Pi_N \xi^\omega. \tag{7.12}$$

C'est une équation stochastique dans $\mathbb{R}^{2N}$ telle que l'équation libre qui lui est associée possède une fonction de Lyapunov quadratique $||\,\mathrm{u}^N\,||^2$. Alors, la formule d'Itô appliquée à (7.12) avec la fonctionnelle quadratique $f(\mathrm{u}) = ||\,\mathrm{u}\,||_m^2$ implique la relation (7.3) avec $\mathrm{u} = \mathrm{u}^N$ et B'_m remplacé par $\sum\limits_{|s|\leq N} b_s^2 (2\pi s)^{2m}$, voir [18].

Utilisant le lemme de Fatou, nous passons à la limite dans (7.12) et obtenons (7.2) si $\mathrm{u}_0 \in H^{m+2}$ et $B_{m+2} < \infty$.

Finalement, si $\mathrm{u}_0 \in H^1$ et $B_m < \infty$, alors nous approchons u_0 par $\{\mathrm{u}_0^j\} \subset H^{m+2}$, et pour $j = 1, 2, ...$, nous définissons la suite $\{b_s^j, s \in \mathbb{Z}^*\}$ par la relation : $b_s^j = b_s$ si $|s| \leq j$, sinon $b_s^j = 0$. Il est clair que $B_{m+2}\{(b_s^j)\} < +\infty$ pour chaque j. On définit $\xi^{j\omega}$ utilisant la suite b_s^j. Par les résultats de la section 2, il existe une suite $n_1, n_2, ...$ telle que $\xi^{n^j\omega}$ converge p.p vers ξ^ω dans X_m^T quand n_j tend vers $+\infty$. Alors $\mathrm{u}(\cdot, \mathrm{u}_0^{n^j}, \xi^{n^j\omega})$ converge p.p vers $\mathrm{u}(\cdot, \mathrm{u}_0, \xi^\omega)$ dans l'espace X_m^T (voir le théorème 3.3). Ainsi, la relation (7.2) est justifiée pour les solutions $\mathrm{u}(\cdot, \mathrm{u}_0^{n^j}, \xi^{n^j\omega})$. Nous passons à la limite $n_j \to +\infty$ (cf. ii)) pour obtenir le résultat.

□

Par le théorème 7.1,

$$\text{si } B_4, B_{\lceil m \rceil} < \infty,\ m \geq 1,\ \mathrm{u}_0 \in H^1 \text{ et } t > 0,\ \text{alors } \mathbb{P}(\mathrm{u}(t, \mathrm{u}_0) \in H^m) = 1. \tag{7.13}$$

Corollaire 7.1. *Sous les conditions du théorème 7.1, pour tout $m, k \geq 1$, il existe $C(k, m, \theta) > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}(t)||_m^k\right] \leq C \nu^{-\frac{k}{2}(2m-1)}, \quad \forall t \geq \theta. \tag{7.14}$$

Démonstration. i) Supposons d'abord que $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $\mathbb{N}^* \ni s > m$ et par le lemme 3.2, nous avons

$$\mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}(t)||_m^k\right] \leq C \mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}(t)||_s^{k\lambda_m(s)} |\,\mathrm{u}(t)|_\infty^{k(1-\lambda_m(s))}\right], \quad \lambda_m(s) = \frac{2m-1}{2s-1},$$

où $C = C(m, k, s) > 0$. Choisissons s suffisamment grand tel que $k\lambda_m(s) < 2$. Par l'inégalité de Hölder, le terme de droite est borné par

$$C' \mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}(t)||_s^2\right]^{\frac{k\lambda_m(s)}{2}} \mathbb{E}\left[|\,\mathrm{u}(t)|_\infty^a\right]^b,$$

avec $C'(m, k, s), a(m, k, s), b(m, k, s) > 0$. Donc, en utilisant (7.2), nous obtenons (7.14).

ii) Si m n'est pas un entier, alors nous raisonnons comme dans l'étape iii) de la démonstration du théorème 7.1.

□

8. Bilan de l'énergie et bornes inférieures

Si dans l'identité d'Itô (7.1) on prend $f(\mathrm{u}(t)) = \frac{1}{2}||\,\mathrm{u}(t)||^2$, alors pour tout $t \geq 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(t)||^2] + \nu \mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(t)||_1^2] = \frac{1}{2}B_0.$$

On intègre cette égalité entre $T \geq 1$ et $T+\sigma$ ($\sigma > 0$) :

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(T+\sigma)||^2] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(T)||^2] + \nu \int_T^{T+\sigma} \mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(s)||_1^2]ds = \frac{\sigma}{2}B_0 \tag{8.1}$$

La relation (8.1) est appelée *bilan de l'énergie*. Le terme $\frac{1}{2}\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(t)||^2]$ est appelé *l'énergie* de $\mathrm{u}(t)$, et $\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(s)||_1^2]$ est *le taux de dissipation de l'énergie*.

Le théorème suivant nous donne une encadrement du taux de dissipation de l'énergie.

Théorème 8.1. *Soit $B_4 < \infty$ et $\mathrm{u}(t) = \mathrm{u}(t;\mathrm{u}_0)$, $\mathrm{u}_0 \in H^1$. Alors, il existe $\sigma_0(B_0, B_4) > 0$ telle que pour tout $\sigma \geq \sigma_0$ et $T \geq 1$:*

$$\frac{1}{4}B_0 \leq \frac{\nu}{\sigma}\int_T^{T+\sigma} \mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(s)||_1^2]ds \leq \frac{3}{4}B_0,$$

uniformément en $0 < \nu \leq 1$.

Démonstration. Par la relation de Kolmogorov-Chapman (5.8) et le corollaire 4.1 avec $T = \theta = 1$ et $p = 2$, et en écrivant $t \geq 1$ comme $t = \tau + 1$, $\tau \geq 0$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[||\,\mathrm{u}(t)||^2\right] = \int_{H^1} ||\,\mathrm{u}\,||^2 \Sigma_{\tau+1}(\mathrm{u}_0)(d\,\mathrm{u}) = \int_{H^1} \underbrace{\langle ||\,\mathrm{u}\,||^2, \Sigma_1(w)\rangle}_{=\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(1;w)||^2]} \Sigma_\tau(\mathrm{u}_0)(dw) \leq C(B_4). \tag{8.2}$$

Soit $\sigma \geq \frac{2C(B_4)}{B_0} =: \sigma_0$. Alors de (8.2), on obtient

$$\frac{1}{2\sigma}\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(T)||^2] \leq \frac{1}{4}B_0, \quad \frac{1}{2\sigma}\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}(T+\sigma)||^2] \leq \frac{1}{4}B_0.$$

D'où le résultat par (8.1). □

Notation 8.1. *Fixons $T \geq 1$ et $\sigma \geq \sigma_0$. Si $\xi^\omega(t)$ est un processus aléatoire réel, on pose*

$$\langle\langle \xi^\omega \rangle\rangle = \langle\langle \xi^\omega \rangle\rangle_{T,\sigma} = \frac{1}{\sigma}\int_T^{T+\sigma} \mathbb{E}[\xi^\omega(t)]dt.$$

Avec cette notation, l'inégalité du théorème 8.1 a pour expression

$$\frac{1}{4}B_0\nu^{-1} \leq \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_1^2 \rangle\rangle \leq \frac{3}{4}B_0\nu^{-1}.$$

Le théorème suivant fournit un encadrement pour $\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 \rangle\rangle$.

Théorème 8.2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $B_m < \infty$, $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $T \geq 1$ et $\mathrm{u}_0 \in H^1$. Il existe $C_m(\sigma_0) > 1$ tel que la solution $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t;\mathrm{u}_0)$ satisfait :*

$$C_m^{-1}\nu^{-(2m-1)} \leq \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 \rangle\rangle \leq C_m\nu^{-(2m-1)}, \tag{8.3}$$

uniformément en $0 < \nu \leq 1$.

Démonstration. L'inégalité à droité de (8.3) suit du théorème 7.1, et pour $m = 1$, l'inégalité à gauche est déjà étbalie. Maintenant, soit $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$. Par l'inégalité (3.2) , on a

$$||\,\mathrm{u}_x\,|| \leq c||\,\mathrm{u}_x\,||_{m-1}^{\frac{1}{2m-1}}\,|\,\mathrm{u}_x\,|_1^{\frac{2m-2}{2m-1}}, \quad c > 0.$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder (appliquée à l'intégrale $\frac{1}{\sigma}\int_\Omega \int_T^{T+\sigma} \cdots dt\mathbb{P}(d\omega)$) et le corollaire 4.1, nous avons

$$\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_1^2 \rangle\rangle \leq c\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 \rangle\rangle^{\frac{1}{2m-1}} \langle\langle |\,\mathrm{u}_x\,|_1^2 \rangle\rangle^{\frac{2m-2}{2m-1}} \leq C_m \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 \rangle\rangle^{\frac{1}{2m-1}}.$$

C'est-à-dire :

$$\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 \rangle\rangle \geq C_m^{1-2m} \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_1^2 \rangle\rangle^{2m-1}.$$

Donc, d'après les théorèmes 7.1 et 8.1, on obtient (8.3). □

Corollaire 8.1. *Sous les conditions du théorème précédent, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq 1$, il existe $C(k, m, \sigma_0) > 0$ telle que*

$$C^{-1}\nu^{-m+\frac{1}{2}} \leq \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^k \rangle\rangle^{\frac{1}{k}} \leq C\nu^{-m+\frac{1}{2}}. \tag{8.4}$$

Démonstration. Après moyennisation danss (7.14), l'inégalité de droite dans (8.4) est immédiate. Si $k \geq 2$, alors l'inégalité de gauche est une conséquence de l'inégalité de Hölder et de (8.3). Maintenant, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 \rangle\rangle = \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^{\frac{2}{3}} ||\,\mathrm{u}\,||_m^{\frac{4}{3}} \rangle\rangle \leq \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m \rangle\rangle^{\frac{2}{3}} \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^4 \rangle\rangle^{\frac{1}{3}}.$$

Alors, par (8.4) avec $k = 2$ et $k = 4$,

$$\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m \rangle\rangle \geq \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^2 \rangle\rangle^{\frac{3}{2}} \langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||_m^4 \rangle\rangle^{-\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{\nu^{-m+\frac{1}{2}}}{C(2,m,\sigma_0)} \right)^3 \left(C(4,m,\sigma_0)\nu^{-m+\frac{1}{2}} \right)^{-2} =: C^{-1}\nu^{-m+\frac{1}{2}},$$

et (8.4) est établie pour $k = 1$. Finalement, pour $k \in (1, 2)$, l'inégalité de gauche dans (8.4) est une conséquence de celle avec $k = 1$ et de l'inégalité de Hölder. □

Considérons l'espace de probabilité

$$(Q, \mathcal{T}, \rho) := \left([T, T+\sigma] \times \Omega, \mathcal{L} \times \mathcal{F}, \frac{dt}{\sigma} \times \mathbb{P} \right),$$

où $\sigma \geq \sigma_0$, $T \geq 1$, et $\mathcal{L}$ est la tribu Borélienne sur $[T, T+\sigma]$. Avec cette notation, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 8.2. *Pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $\alpha(m, \sigma_0), C(m, \sigma_0) > 0$ *telles que*

$$\rho_{\nu,m} := \rho\left(\alpha\nu^{-m+\frac{1}{2}} \leq ||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m \leq \alpha^{-1}\nu^{-m+\frac{1}{2}} \right) \geq C(m, \sigma_0), \tag{8.5}$$

uniformément en $0 < \nu \leq 1$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $Y_\varepsilon = \{(t, \omega) \in Q : ||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m \leq \varepsilon\}$. Le corollaire 8.1 (avec $k = 1$ et $k = 2$) implique que

$$\begin{aligned} C(1,m,\sigma_0)^{-1}\nu^{-m+\frac{1}{2}} &\leq \int_{Y_\varepsilon} ||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m d\rho + \int_{Q\setminus Y_\varepsilon} ||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m d\rho \\ &\leq \varepsilon + \left(\int_Q ||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m^2 d\rho \right)^{\frac{1}{2}} (\rho(Q\setminus Y_\varepsilon))^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon + C(2,m,\sigma_0)\nu^{-m+\frac{1}{2}} (\rho(Q\setminus Y_\varepsilon))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon = \varepsilon_\nu = \frac{1}{2}C(1,m,\sigma_0)^{-1}\nu^{-m+\frac{1}{2}}$, et on note par $Y = Y_{\varepsilon_\nu}$. Alors

$$\rho\left(||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m > \varepsilon_\nu \right) = \rho(Q\setminus Y) \geq \left(\frac{1}{2} \left(C(1,m,\sigma_0)C(2,m,\sigma_0) \right)^{-1} \right)^2 := C'_m. \tag{8.6}$$

Soit $\alpha^{-1} \geq 2C(1, m, \sigma_0)$. D'après (8.6), (8.4) (avec $k = 1$) et l'inégalité de Tchebychev, nous avons

$$\rho_{\nu,m} = \rho\left(||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m \geq \alpha\nu^{-m+\frac{1}{2}} \right) - \rho\left(||\,\mathrm{u}^\omega(t)||_m \geq \alpha^{-1}\nu^{-m+\frac{1}{2}} \right) \geq C'_m - \alpha C(1,m,\sigma_0).$$

Maintenant, on choisit α de sorte que le membre de droite soit strictement positif, ce qui implique (8.5). □

9. Échelle d'espace

Soit u^ν une fonction dérivable sur $\mathbb{S}^1$ de moyenne nulle, dépendant du paramètre $0 < \nu \ll 1$ Notons par $M := |\,\mathrm{u}^\nu\,|_\infty$. Soit $\gamma \geq 0$. En physique, on dit que *l'échelle d'espace de* u^ν est égale à ν^γ s'il existe des points $y \in \mathbb{S}^1$, tels que les incréments $\mathrm{u}(y + \nu^\gamma) - \mathrm{u}(y)$ de u sont de l'ordre de M, et pour tout $\gamma' > \gamma$, $\mathrm{u}(y + \nu^\gamma) - \mathrm{u}(y)$ est toujours très petit par rapport à M.

Soit v une fonction telle que $v(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^*} \widehat{v}_s e^{2i\pi sx} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$, non identiquement nulle. On considère la fonction périodique $\mathrm{u}^\nu(x) = v(x\lceil\nu^{-\gamma}\rceil)$, $\gamma \geq 0$, où $\lceil\cdot\rceil$ est la fonction partie entière par excès. Il est facile de vérifier que l'échelle d'espace de u^ν est égale à ν^γ. Notons par $\widehat{\mathrm{u}}_s^\nu$, $s \in \mathbb{Z}^*$, les coefficients de Fourier de u^ν, et soit $k_s := \frac{s}{\lceil\nu^{-\gamma}\rceil}$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{Z}^*$: $\widehat{\mathrm{u}}_s^\nu = \widehat{v}_{k_s}\chi_{\{k_s\in\mathbb{Z}^*\}}$, où $\chi_{\{k_s\in\mathbb{Z}^*\}}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\{k_s \in \mathbb{Z}^*\}$.

Écrivons le *nombre d'onde* s pour $\mathrm{u}^{\nu}(x)$ en utilisant l'échelle logarithmique de base ν^{-1} :

$$s = s_{\nu}(\alpha) = \lceil \nu^{-\alpha} \rceil, \quad \alpha > 0,$$

alors $\alpha = \alpha(s)$ est de l'ordre $\frac{\ln s}{\ln \nu^{-1}}$. Soit $\gamma_0 > \gamma$. Comme $v \in \mathcal{C}^{\infty}$, alors il est facile de vérifier que

$$\text{si } \alpha \geq \gamma_0 \text{ et } s = s_{\nu}(\alpha), \text{ alors } \forall N \in \mathbb{N}^*, \ \exists C_N > 0 \text{ telle que } |\widehat{\mathrm{u}}^{\nu}_{s_{\nu}(\alpha)}| \leq C_N |s_{\nu}(\alpha)|^{-N}, \tag{9.1}$$

pour chaque ν, et C_N ne dépendant pas de $\nu \in (0,1)$ (mais dépend a priori de γ_0).

De plus, nous avons aussi

$$\text{si } \gamma_0 < \gamma \text{ alors (9.1) n'est pas valide pour tout } 0 < \nu \leq 1. \tag{9.2}$$

Pour vérifier (9.2), on peut choisir $\alpha = \gamma$.

Cette discussion motive la définition suivante

Définition 9.1. *Soit* $0 < \nu \leq 1$ *et*

$$\mathrm{u}^{\nu}(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} \widehat{\mathrm{u}}^{\nu}_s e^{2i\pi s x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1). \tag{9.3}$$

(1) *Alors, l'échelle d'espace de* u^{ν} *est égale à* ν^{γ}, $\gamma \geq 0$, *si on a les deux affirmations suivantes :*
   i) (9.1) est satisfaite pour tout $\gamma_0 > \gamma$.
   ii) si $\gamma > 0$, *alors (9.2) est satisfaite.*

(2) *Soient* $t \geq 0$, $x \in \mathbb{S}^1$, $\omega \in \Omega$ *et* $\mathrm{u}^{\nu\omega}(t,x)$ *un champ aléatoire continue en temps* t, $\mathcal{C}^1$ *en espace* x, *et de valeur moyenne nulle. On représente* $\mathrm{u}^{\nu\omega}$ *comme dans (9.3) avec* $\widehat{\mathrm{u}}^{\nu}_s = \widehat{\mathrm{u}}^{\nu\omega}_s(t)$. *Alors l'échelle d'espace de* $\mathrm{u}^{\nu\omega}$ *est égale à* ν^{γ}, $\gamma \geq 0$, *si les conditions i) et ii) sont vérifiées avec* $|\widehat{\mathrm{u}}^{\nu}_s|$ *remplacé par* $\langle\langle |\widehat{\mathrm{u}}^{\nu}_s|^2 \rangle\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Soit $\mathrm{u}(t,x)$ une solution de (B) représentée par sa série de Fourier (9.3) avec $\widehat{\mathrm{u}}_s = \widehat{\mathrm{u}}^{\nu\omega}_s(t)$, cf. (1.2). Par conséquent,

$$||\,\mathrm{u}\,||^2_m = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\mathrm{u}}_k(t)|^2 k^{2m}.$$

Comme $\widehat{\mathrm{u}}_k = \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{u}(x) e^{-2i\pi k x}$, alors par une intégration par partie, nous trouvons que

$$|\widehat{\mathrm{u}}_k(t)| \leq \frac{1}{2\pi k} |\,\mathrm{u}_x\,|_1, \quad k \geq 1.$$

Donc, par le corollaire 4.1, si $\mathrm{u}(t,x)$ est une solution de (B), alors

$$\mathbb{E}[|\widehat{\mathrm{u}}_k(t)|^2] \leq C k^{-2}, \quad t \geq 1. \tag{9.4}$$

Théorème 9.1. *Supposons que* $B_m < \infty$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$. *Alors, pour chaque* $\mathrm{u}_0 \in H^1$, *l'échelle d'espace de* $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t;\mathrm{u}_0)$ *est égale à* ν. *C'est-à-dire, pour tout* $\gamma_0 > 1$ *et* $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\langle\langle |\widehat{\mathrm{u}}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_N k^{-N}, \quad \text{si } k = \lceil \nu^{-\gamma} \rceil, \ \gamma > \gamma_0, \ \nu \in (0,1], \tag{9.5}$$

où $C_N = C_N(\gamma_0) > 0$ *ne dépend ni de* ν, *ni de* γ. *Par contre, si* $\gamma_0 < 1$, *alors (9.5) n'est pas vrai pour tout* $\gamma \geq \gamma_0$ *et* $\nu \in (0,1]$, *avec une certaine constante* $C_N = C_N(\gamma_0) > 0$.

Démonstration. Par le théorème 8.2 on peut écrire

$$\langle\langle |\widehat{\mathrm{u}}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_m \nu (k\nu)^{-2m}.$$

Si $k = k_{\nu} = \lceil \nu^{-\gamma} \rceil$, $\gamma \geq \gamma_0 > 1$, nous obtenons que

$$\langle\langle |\widehat{\mathrm{u}}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_m \nu (\nu^{1-\gamma})^{-2m} \leq C_m k^{-2m\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0}}, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*,$$

d'où (9.5). Maintenant, supposons (9.5) avec $\gamma_0 < 1$ et écrivons $\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||^2_m \rangle\rangle$ comme :

$$\langle\langle ||\,\mathrm{u}\,||^2_m \rangle\rangle = \underbrace{2 \sum_{1 \leq k \leq \nu^{-\gamma_0}} \langle\langle |\widehat{\mathrm{u}}_k|^2 \rangle\rangle k^{2m}}_{=:J} + \underbrace{2 \sum_{k > \nu^{-\gamma_0}} \langle\langle |\widehat{\mathrm{u}}_k|^2 \rangle\rangle k^{2m}}_{=:L}.$$

Majorons les deux termes du membre de droite. Soit $k > \nu^{-\gamma_0}$. Alors, nous pouvons écrire $k = \lceil \nu^{-\gamma} \rceil$, $\gamma \geq \gamma_0$. La relation (9.5) implique $\langle\langle |\hat{\mathrm{u}}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_N(\gamma_0) k^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Choisissons $N = 2m+2$, nous avons

$$L \leq C(\gamma_0) \sum_{k > \nu^{-\gamma_0}} k^{-2} \leq C'(\gamma_0) \nu^{\gamma_0}.$$

Aussi, par le théorème 8.2 :

$$J \leq \nu^{-2\gamma_0} \sum_{1 \leq k < \nu^{-\gamma_0}} (k)^{2m-2} \langle\langle |\hat{\mathrm{u}}_k|^2 \rangle\rangle \leq \nu^{-2\gamma_0} \langle\langle ||\, \mathrm{u}\, ||_{m-1}^2 \rangle\rangle \leq c \nu^{-2m-2\gamma_0+3}.$$

D'ici,

$$\langle\langle ||\, \mathrm{u}\, ||_m^2 \rangle\rangle \leq C_m(\gamma_0) \nu^{-2m-2\gamma_0+3}, \quad \nu \in (0,1]. \tag{9.6}$$

D'après le théorème 8.2 et (9.6), on a pour tout $1 \geq \nu > 0$: $c_m \nu^{-(2m-1)} \leq C_m(\gamma_0) \nu^{-2m-2\gamma_0+3}$, ceci implique que $\gamma_0 \geq 1$. La contradiction implique que $\gamma_0 \geq 1$. □

10. Lemmes de récurrence et L_1-contraction

On rappelle que nous supposons $B_4 < \infty$.

Lemme 10.1. *Soit $B_m < \infty$, $m \geq 1$ et $T > 0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\gamma_{\epsilon,T} > 0$ telle que $\mathbb{P}(||\xi||_{X_m^T} < \epsilon) \geq \gamma_{\epsilon,T}$.*

C'est un résultat classique sur la théorie des mesures Gaussiennes dans les espaces de Banach [6, théorème 3.6.1], [20, section 2, corollaire 1.1].

Lemme 10.2. *Soit u_0 dans H^1. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T_\epsilon = T_\varepsilon(||\, \mathrm{u}_0\, ||_1) > 0$ et $\delta_\epsilon = \delta_\epsilon(||\, \mathrm{u}_0\, ||_1) > 0$ telles que*

$$\mathbb{P}(||\, \mathrm{u}(T_\epsilon; \mathrm{u}_0)|| < \epsilon) \geq \delta_\epsilon. \tag{10.1}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\xi = 0$, $\mathrm{u}_0 \in H^1$ et notons $\mathrm{u}^0(t) = \mathrm{u}(t; \mathrm{u}_0, 0)$. On multiplie par u^0 l'équation dans (B) et on intègre par parties en espace, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||\, \mathrm{u}^0(t)||^2 = -\nu ||\, \mathrm{u}_x^0(t)||^2 \leq -\nu ||\, \mathrm{u}^0(t)||^2.$$

Donc, en utilisant le lemme de Gronwall, nous obtenons que $||\, \mathrm{u}^0(t)||^2 \leq e^{-2\nu t} ||\, \mathrm{u}_0\, ||^2$. Par conséquent, il existe un $T_\epsilon = T_\epsilon(||\, \mathrm{u}_0\, ||) > 0$ tel que $||\, \mathrm{u}^0(T_\epsilon)|| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Par la proposition 3.1, l'application $\mathcal{M}$ est Lipschitzienne sur les sous-ensembles bornés de $H^1 \times X_1^{T_\varepsilon}$. Donc, il existe $\gamma_\epsilon = \gamma_\epsilon(||\, \mathrm{u}_0\, ||_1) > 0$ tel que si $||\xi||_{X_1^T} \leq \gamma_\epsilon$ alors $||\, \mathrm{u}^0(T_\epsilon) - \mathrm{u}(T_\epsilon; \mathrm{u}_0, \xi)||_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ceci implique que si $||\xi||_{X_1^T} \leq \gamma_\epsilon$ alors $||\, \mathrm{u}(T_\epsilon; \mathrm{u}_0, \xi)|| < \epsilon$, et par le lemme 10.1 avec $m = 1$, on a $\mathbb{P}(||\xi||_{X_1^T} \leq \gamma_\epsilon) =: \delta_\varepsilon > 0$. D'où (10.1). □

Lemme 10.3. *(Récurrence)*

Pour tout u_0 dans H^1 et $\varepsilon > 0$, on a

$$\pi(T, \varepsilon) := \mathbb{P}(\inf_{t \in [0,T[} ||\, \mathrm{u}(t; \mathrm{u}_0)|| \geq \epsilon) \underset{T \to +\infty}{\to} 0, \tag{10.2}$$

où la convergence est uniforme en u_0 .

Dans la suite on note par

$$B_m^R(v) = \{u : ||u - v||_m \leq R\}.$$

Démonstration. Par l'inégalité de Tchebychev et le corollaire 4.1, on a pour une constante $c_0 > 0$ et pour tout $R > 0$: $\mathbb{P}(||\, \mathrm{u}(1; \mathrm{u}_0)|| \geq R) \leq c_0^{-1} R$. Si $R = 2c_0$, alors $\mathbb{P}(||\, \mathrm{u}(1; \mathrm{u}_0)|| \leq R) \geq \frac{1}{2}$.

Par la relation de Kolmogorov-Chapman (5.8) appliquée à la fonction caractéristique de $B_0^\varepsilon(0)$, et par (10.1), nous avons que

$$\mathbb{P}(||\, \mathrm{u}(1 + T_\varepsilon; \mathrm{u}_0)|| < \varepsilon) \geq \int_{B_0^R(0)} \mathbb{P}(||\, \mathrm{u}(T_\varepsilon; v)|| < \varepsilon) \Sigma_1(\mathrm{u}_0)(dv) \geq \frac{1}{2} \delta_\varepsilon, \quad \forall\, \mathrm{u}_0 \in H^1.$$

Alors

$$\mathbb{P}(||\,\mathrm{u}(1+T_\varepsilon;\mathrm{u}_0)|| \geq \varepsilon) \leq 1-\frac{1}{2}\delta_\varepsilon, \quad \forall\,\mathrm{u}_0 \in H^1. \tag{10.3}$$

On note par $T^j = j(1+T_\epsilon)$, par Q_j l'évènement $\{||\,\mathrm{u}(T^j)|| \geq \varepsilon\}$ et par $Q^N = \bigcap_{i=1}^{N} Q_i$. Nous avons que $Q^N = \{\omega \in Q^{N-1} : ||\,\mathrm{u}(T^N)|| \geq \varepsilon\}$. En utilisant la relation de Kolmogorov-Chapman sous la forme (5.10), ainsi que (10.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Q^N) &= \mathbb{E}[\chi_{\{\mathrm{u}(\tau;\mathrm{u}_0)_{|\tau\in[0,T^{N-1}]}\in Q^{N-1}\}}\mathbb{P}(||\,\mathrm{u}(1+T_\varepsilon;\mathrm{u}(T^{N-1};\mathrm{u}_0)|| \geq \varepsilon)]\\ &\leq (1-\frac{1}{2}\delta_\varepsilon)\mathbb{E}[\chi_{\{\mathrm{u}(\tau;\mathrm{u}_0)_{|\tau\in[0,T^{N-1}]}\in Q^{N-1}\}}] = (1-\frac{1}{2}\delta_\varepsilon)\mathbb{P}(Q^{N-1}).\end{aligned}$$

Donc, nous avons par récurrence que $\mathbb{P}(Q^N) \leq (1-\frac{1}{2}\delta_\varepsilon)^N$. Finalement, comme $\pi(T,\varepsilon) \leq \mathbb{P}(Q^N)$ si $T \geq T^N$, nous obtenons (10.2) en passant à la limite $N \to +\infty$. □

Lemme 10.4. *(L_1-contraction)*
Pour $j = 1,2$, fixons $\mathrm{u}_j(0) \in H^1$, et soit $\xi \in X_1^T$. Considérons la solution $\mathrm{u}_j(t) = \mathrm{u}(t;\mathrm{u}_j(0),\xi) \in H^1$. Alors

$$|\,\mathrm{u}_1(t)-\mathrm{u}_2(t)|_1 \leq |\,\mathrm{u}_1(0)-\mathrm{u}_2(0)|_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Soit $w = \mathrm{u}_1-\mathrm{u}_2$. Alors w vérifie

$$\left\{\begin{array}{c} w_t+\frac{1}{2}(w(\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2))_x-\nu w_{xx}=0,\\ w(0)=\mathrm{u}_1(0)-\mathrm{u}_2(0)=:w_0.\end{array}\right. \tag{10.4}$$

Soit le problème de Cauchy conjugué :

$$\left\{\begin{array}{c} \phi_t+\frac{1}{2}(\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2)\phi_x+\nu\phi_{xx}=0,\\ \phi(T,x)=\phi_T(x),\end{array}\right. \tag{10.5}$$

où $t \in [0,T]$, $\phi_T(x) \in \mathcal{C}^0$ et $|\phi_T|_\infty = 1$. La théorie des équations parabolique implique qu'il existe une unique solution ϕ au problème (10.5), et cette solution satisfait le principe du maximum : $|\phi(t)|_\infty \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$ [12].

Après avoir multiplié par ϕ l'équation en w dans (10.4), intégré par parties sur $[0,T]\times\mathbb{S}^1$ puis en utilisant l'équation en ϕ dans (10.5), on obtient que $|\langle w(T),\phi_T\rangle| = |\langle w_0,\phi(0)\rangle|$. Donc, nous avons

$$|\langle w(T),\phi_T\rangle| \leq |w_0|_1 =: K, \tag{10.6}$$

car $|\phi(0)|_\infty \leq 1$. Soit $\epsilon > 0$ et χ_ϵ la fonction définie par

$$\chi_\epsilon(t) = \left\{\begin{array}{c} -1,\ t\leq -\epsilon,\\ \frac{1}{\epsilon}t,\ -\epsilon\leq t\leq\varepsilon,\\ 1,\ t\geq\epsilon,\end{array}\right.$$

alors $\chi_\epsilon(t) \underset{\epsilon\to 0}{\to} \mathrm{sgn}(t)$ pour chaque t, et si $\phi_T^\epsilon = \chi_\epsilon(w(T,x))$, alors ϕ_T^ϵ est continue et $|\phi_T^\varepsilon|_\infty = 1$. Donc, par (10.6) et en utilisant le théorème de convergence dominée, nous avons

$$|w(T)|_1 = |\int w(T,x)\ \mathrm{sgn}(w(T,x))dx| = \lim_{\varepsilon\to 0}|\int w(T,x)\phi_T^\epsilon(x)dx| \leq K.$$

□

11. Les mesures stationnaires et la méthode de Bogoliubov-Krylov

On rappelle que nous supposons $B_4 < \infty$.

Définition 11.1. *Soit $\mu \in \mathcal{P}(H^m), m \geq 1$.*

1. *μ est dite mesure stationnaire de (B) si pour tout $t \geq 0$: $S_t^*\mu = \mu$. C'est-à-dire, si $\mathcal{D}(\mathrm{u}_0) = \mu$ alors $\mathcal{D}(\mathrm{u}(t;\mathrm{u}_0)) \equiv \mu$.*
2. *Une solution $\mathrm{u}(t)$ de (B) telle que $\mathcal{D}(\mathrm{u}(t;\mathrm{u}_0)) \equiv \mu$ est dite solution stationnaire.*

Le but de cette section est de démontrer l'existence d'une mesure stationnaire de (B), (1.3), (3.1) par la *méthode de Bogoliubov-Krylov.*

Théorème 11.1. *Il existe une mesure stationnaire $\mu \in \mathcal{P}(H^1)$.*

Démonstration. On note par $\mathrm{u}(t) = \mathrm{u}(t;0)$ la solution de (B) issue de $\mathrm{u}_0 = 0$, et par $\mu(t) := \mathcal{D}(\mathrm{u}(t))$. Notons que $S^*_\theta(\mu(t)) = \mathcal{D}(\mathrm{u}(t+\theta)) = \mu(t+\theta)$ pour tout $t, \theta \geq 0$.

Considérons *l'ansatz de Bogoliubov-Krylov.* C'est-à-dire, pour tout $T \geq 1$ définissons $m_T \in \mathcal{P}(H^2)$ par

$$m_T(\cdot) = \frac{1}{T}\int_1^{1+T} \mu(s)(\cdot)ds.$$

Par le théorème 7.1 (avec $m=2$), on sait qu'il existe une constante $C>0$ telle que $\mathbb{E}[\|\mathrm{u}(t)\|_2^2] < C$ pour chaque $t \geq 1$. L'inégalité de Tchebychev implique que $\mu(t)(B_2^R(0)) = \mathbb{P}(\|\mathrm{u}(t)\|_2 \leq R) \geq 1 - CR^{-1}$ si $t \geq 1$. Donc, nous avons

$$m_T(B_2^R(0)) = \frac{1}{T}\int_1^{1+T} \mu(s)(B_2^R(0))ds \geq 1 - \frac{C}{R}, \quad \forall R > 0. \tag{11.1}$$

De plus, par le théorème de Rellich-Kondrachev, $B_2^R(0)$ est compact dans H^1. Alors, par (11.1), nous obtenons que l'ensemble $M = \{m_T\}$ est tendu dans $\mathcal{P}(H^1)$. Par le théorème 6.3, cet ensemble est faiblement relativement compact. Donc, la suite $\{m_1, m_2, \ldots\} \subset M$ admet une sous-suite $\{m_{j_k}\}$ qui converge faiblement vers une limite $\mu \in \mathcal{P}(H^1)$.

Il reste à prouver que μ est stationnaire. Calculons $S^*_\theta(m_{j_k})$, pour tout $\theta > 0$. Comme S^*_t est linéaire et vérifie $S^*_\theta(\mu(t)) = \mu(t+\theta)$, nous avons

$$\begin{aligned} S^*_\theta(m_{j_k}) &= \frac{1}{j_k}\int_1^{1+j_k} S^*_\theta(\mu(t))dt = \frac{1}{j_k}\int_1^{1+j_k}\mu(t+\theta)dt = \frac{1}{j_k}\int_{1+\theta}^{1+j_k+\theta}\mu(t)dt \\ &= \underbrace{-\frac{1}{j_k}\int_1^{1+\theta}\mu(t)dt}_{:=I} + \underbrace{\frac{1}{j_k}\int_1^{j_k+1}\mu(t)dt}_{=m_{j_k}} + \underbrace{\frac{1}{j_k}\int_{j_k+1}^{1+j_k+\theta}\mu(t)dt}_{:=K}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$, les termes$|\langle K, f\rangle|$ et $|\langle I, f\rangle|$ sont bornés par $\frac{1}{j_k}|f|_\infty\theta$ et $\lim\limits_{j_k\to+\infty}|\langle I, f\rangle| = \lim\limits_{j_k\to+\infty}|\langle K, f\rangle| = 0$. De plus, comme $m_{j_k} \rightharpoonup \mu$ et S^*_θ est faiblement continue (cf. théorème 6.2), en passant à la limite dans l'égalité ci dessus, on a finalement $S^*_\theta\mu = \mu$. □

La mesure stationnaire du théorème 11.1 est aussi lisse que la force η^ω dans (B) :

Proposition 11.1. *Soit $B_m < \infty$, $m \geq 1$. Alors la mesure stationnaire μ est supportée par l'espace H^m : $\mu(H^m) = 1$.*

Démonstration. Si $B_m < \infty$ alors par (7.13), $\mu(s)(H^m) = 1$ pour tout $s > 0$, et $m_T(H^m) = 1$ pour tout $T \geq 1$. Comme H^m est un sous-ensemble fermé de H^1 et $m_{j_k} \rightharpoonup \mu$ dans H^1, alors $\mu(H^m) = 1$ (cf. (6.1)). □

Plus particulièrement, nous avons aussi le

Corollaire 11.1. *Si $B_m < \infty$ pour tout $m \geq 1$, alors $\mu(\mathcal{C}^\infty) = 1$.*

12. L'unicité de la mesure stationnaire et la propriété de mélange

On renvoie à [23, p.101-103], pour le cadre classique du *couplage de Döblin.* Il est remarquable que le couplage de Döblin s'applique à l'équation de Burgers avec des modifications minimales ; nous expliquerons cela dans cette section. Par contre, pour les équations aux dérivées partielles stochastiques plus complexes, l'idée de Döblin est plus délicate à appliquer ; elle s'emploie avec des modifications plus profondes [23, Section 3].

Nous supposerons toujours que $B_4 < +\infty$. Considérons deux copies d'équation de Burgers de conditions initiales $\mathrm{u}', \mathrm{u}'' \in H^1$. C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\mathrm{u}_1)_t + \mathrm{u}_1(\mathrm{u}_1)_x - \nu(\mathrm{u}_1)_{xx} = \eta, & \mathrm{u}_1(0) = \mathrm{u}', \\ (\mathrm{u}_2)_t + \mathrm{u}_2(\mathrm{u}_2)_x - \nu(\mathrm{u}_2)_{xx} = \eta, & \mathrm{u}_2(0) = \mathrm{u}'', \end{array} \right. \tag{12.1}$$

avec u' et u'' des variables aléatoires indépendantes de η. Soit $\mathrm{u}_1(t) = \mathrm{u}_1(t, \mathrm{u}')$ et $\mathrm{u}_2(t) = \mathrm{u}_2(t, \mathrm{u}'')$. Alors

$$U(t) = (\mathrm{u}_1(t), \mathrm{u}_2(t))$$

est solution de (12.1) telle que

$$U(0) = (\mathrm{u}', \mathrm{u}'') =: U_0.$$

Si π_1 et π_2 sont les opérateurs définies par :

$$\pi_1(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_1, \quad \pi_2(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_2,$$

alors $\pi_j \circ \mathcal{D}(U(t)) = \mathcal{D}(\mathrm{u_j}(\mathrm{t}))$, $j = 1, 2$. On dit que la mesure $\mathcal{D}(U(t)) \in \mathcal{P}(H^1 \times H^1)$ est un *couplage* des mesures $\mathcal{D}(\mathrm{u}_1(\mathrm{t})$ et $\mathcal{D}(\mathrm{u}_2(\mathrm{t})$ (voir [23] pour cet important concept).

En répétant le schéma de la démonstration du lemme 10.3, nous avons le

Lemme 12.1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $U_0 \in H^1 \times H^1$: $\mathbb{P}(\inf_{t\in[0,T]} ||U(t)|| \geq \varepsilon) \underset{T\to\infty}{\to} 0$, *uniformément en* U_0.

Lemme 12.2. *Soit* $m \geq 1$. *Il existe* $C(\nu) > 0$ *telle que si* $\mathrm{u}', \mathrm{u}'' \in H^1$ *et* $|\,\mathrm{u}'\,|_1, |\,\mathrm{u}''\,|_1 \leq \frac{1}{m}$, *alors pour tout* $t \geq 1$, *on a :* $||\Sigma_t(\mathrm{u}') - \Sigma_t(\mathrm{u}'')||^*_{L(H^1)} \leq Cm^{-\frac{2}{5}}$.

Démonstration. Par l'inégalité (3.2), nous avons

$$||\,\mathrm{u}_1(t) - \mathrm{u}_2(t)||_1 \leq c|\,\mathrm{u}_1(t) - \mathrm{u}_2(t)|_1^\theta||\,\mathrm{u}_1(t) - \mathrm{u}_2(t)||_2^{1-\theta}, \quad \theta = \frac{2}{5}, \quad c > 0.$$

Donc, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$ tel que $||f||_{L(H^1)} \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \left|\langle\Sigma_t(\mathrm{u}^{'}), f\rangle - \langle\Sigma_t(\mathrm{u}''), f\rangle\right| &= |\mathbb{E}(f(\mathrm{u}_1(t)) - f(\mathrm{u}_2(t)))| \leq \mathbb{E}[||\,\mathrm{u}_1(t) - \mathrm{u}_2(t)||_1] \\ &\leq c\mathbb{E}[|\,\mathrm{u}_1(t) - \mathrm{u}_2(t)|_1^\theta||\,\mathrm{u}_1(t) - \mathrm{u}_2(t)||_2^{1-\theta}]. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Comme $|\,\mathrm{u}_1(0) - \mathrm{u}_2(0)|_1 \leq \frac{2}{m}$, alors $|\,\mathrm{u}_1^\omega(t) - \mathrm{u}_2^\omega(t)|_1 \leq \frac{2}{m}$ pour tout ω (voir lemme 10.4). De plus, $(\alpha - \beta)^{1-\theta} \leq \alpha^{1-\theta} + \beta^{1-\theta}$ pour tout $\alpha, \beta \geq 0$, alors le membre de droite de (12.2) est borné par

$$c(\frac{2}{m})^\theta(\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}_1(t)||_2^{1-\theta}] + \mathbb{E}[\mathrm{u}_2(t)||_2^{1-\theta}]).$$

Par le théorème 7.1 et l'inégalité de Hölder, on a $\mathbb{E}[||\,\mathrm{u}_j(t)||_2^{1-\theta}] \leq C_2(\nu^{-3})^{\frac{1-\theta}{2}}$, $j = 1, 2$ et $C_2 > 0$. Donc,

$$|\langle\Sigma_t(\mathrm{u}'), f\rangle - \langle\Sigma_t(\mathrm{u}''), f\rangle| \leq C\nu^{-\frac{3}{2}(1-\theta)}m^{-\theta}, \quad \text{si } ||f||_{L(H^1)} \leq 1,$$

et on obtient le résultat énoncé. □

Proposition 12.1. *Pour tout* $\mathrm{u}', \mathrm{u}'' \in H^1$,

$$||\Sigma_t(\mathrm{u}') - \Sigma_t(\mathrm{u}'')||^*_{L(H^1)} \leq d_t^0, \quad \forall t \geq 0,$$

où $t \longmapsto d_t^0$ *est une fonction positive indépendante de* u' *et* u'', *telle que* $\lim\limits_{t\to+\infty} d_t^0 = 0$.

Démonstration. On note $d_t(\mathrm{u}', \mathrm{u}'') = ||\Sigma_t(\mathrm{u}') - \Sigma_t(\mathrm{u}'')||^*_{L(H^1)} = \sup\limits_{||f||_L\leq 1} \langle\Sigma_t(\mathrm{u}'), f\rangle - \langle\Sigma_t(\mathrm{u}''), f\rangle$. On a pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$

$$\langle\Sigma_t(\mathrm{u}'), f\rangle - \langle\Sigma_t(\mathrm{u}''), f\rangle = \mathbb{E}[f(\mathrm{u}_1(t)) - f(\mathrm{u}_2(t))] = \mathbb{E}[F(U(t))] =: g(t; U_0).$$

où on a noté $f(\mathrm{u}_1) - f(\mathrm{u}_2)$ par $F(U)$, $U = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$. Donc d_t s'écrit comme $\sup\limits_{||f||_L\leq 1} g(t; U_0)$ et $g(t; U_0) \leq d_t$. Soit $m \geq 1$ et $O_m = \{u \in H^1 : |u|_1 \leq \frac{1}{m}\}$. Considérons *le temps d'atteinte* pour $U^\omega(t)$ dans l'ensemble $O_m \times O_m$:

$$\tau_{m,t}^\omega = \inf\{s \in [0, t] : U^\omega(s) \in O_m \times O_m\} \quad \text{(cf. appendice B)}.$$

i) Comme $|\,\mathrm{u}_j\,|_1 \leq ||\,\mathrm{u}_j\,||$ pour tout $j = 1, 2$, le lemme 12.1 implique que $\mathbb{P}(\tau_{m,t} \geq t-1)$ tend vers 0, uniformément en U_0, quand t tend vers $+\infty$.
ii) Si $\tau_{m,t} < t$ alors $U(\tau_{m,t}) \in O_m \times O_m$.
iii) Comme $g(t; U_0) \leq d_t$, en utilisant le lemme 12.2, on obtient que si $U_0 \in O_m \times O_m$ alors $g(t; U_0) \leq Cm^{-\frac{2}{5}}$, $t \geq 1$.
Par la propriété de Markov forte (16.1), $\mathbb{E}[F(U(t))] = \mathbb{E}[g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t})]$. Donc

$$\mathbb{E}[F(U(t))] = \mathbb{E}[\chi_{\{\tau_{m,t} \leq t-1\}} g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t}))] + \mathbb{E}[\chi_{\{\tau_{m,t} \leq t-1\}} g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t}))], \tag{12.3}$$

où $\chi_{\cdot}$ est la fonction caractéristique. Par ii) et iii), si $\tau_{m,t} \leq t-1$ alors $U(\tau_{m,t}) \in O_m \times O_m$ et $g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t})) \leq Cm^{-\frac{2}{5}}$. Comme $|F(U(t))| \leq 2$, alors (12.3) implique que

$$|\mathbb{E}[F(U(t))]| \leq Cm^{-\frac{2}{5}} + 2\mathbb{P}\{\tau_{m,t} > t-1\} =: d_t^0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $m = m_\varepsilon$ de sorte que $Cm_\varepsilon^{-\frac{2}{5}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Par i), nous avons $2\mathbb{P}\{\tau_{m,t} > t-1\} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$, si $t \geq t_{m_\varepsilon,\varepsilon}$ est suffisamment grand. Finalement, $\mathbb{E}[F(U(t))] \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_{m_\varepsilon,\varepsilon}$, et $d_t(\mathrm{u}', \mathrm{u}'') \leq d_t^0 \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. $\square$

Théorème 12.1. *La mesure stationnaire μ donnée par le théorème 11.1 est unique. De plus, pour tout λ dans $\mathcal{P}(H^1)$:*

$$\lim_{t\to+\infty} ||S_t^*\lambda - \mu||^*_{L(H^1)} = 0, \tag{12.4}$$

uniformément en λ. En particulier, pour tout $\mathrm{u}_0 \in H^1$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} ||\Sigma_t(\mathrm{u}_0) - \mu||^*_{L(H^1)} = 0$ uniformément en u_0 .

La propriété (12.4) est dite *de mélange* et $\mathrm{u}(t)$ est dit *processus mélangeant*.

Démonstration. Soit μ la mesure stationnaire construite par l'ansatz de Bogoliubov-Krylov (Théorème 11.1) et μ_1 une autre mesure stationnaire. Si la relation (12.4) est vraie alors $||\mu_1 - \mu||^*_{L(H^1)} = ||S_t^*\mu_1 - \mu||^*_{L(H^1)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et par conséquent $\mu_1 = \mu$. À présent, démontrons la relation (12.4). Soit $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$ tel que $||f||_L \leq 1$ et $X_t := |\langle f, S_t^*\lambda\rangle - \langle f, \mu\rangle| = |\langle f, S_t^*\lambda\rangle - \langle f, S_t^*\mu\rangle|$. Nous avons

$$\langle f, S_t^*\lambda\rangle = \langle S_t f, \lambda\rangle = \int_{H^1} S_t f(u)\lambda(du) = \int_{H^1}\int_{H^1} S_t f(u)\lambda(du)\mu(du').$$

De même,

$$\langle f, S_t^*\mu\rangle = \int_{H^1}\int_{H^1} S_t f(u')\mu(du')\lambda(du).$$

Ainsi,

$$X_t \leq \int_{H^1}\int_{H^1} |S_t f(u) - S_t f(u')|\lambda(du)\mu(du').$$

Par la proposition 12.1, l'intégrande $|S_t f(u) - S_t f(u')| = |\langle \Sigma_t(\mathrm{u}') - \Sigma_t(\mathrm{u}''), f\rangle|$ est bornée par d_t^0. Par conséquent, $X_t \leq d_t^0$. Donc, nous avons (12.4) dans la limite $t \to +\infty$. $\square$

L'analyse de la proposition 12.1 implique que

$$||\Sigma_t(\mathrm{u}') - \Sigma_t(\mathrm{u}'')||^*_{L(L_1)} \leq Ct^{-\frac{1}{13}}, \quad \forall t \geq 0,$$

voir [7], [8]. Alors la solution $\mathrm{u}(t)$ est un processus *algébriquement mélangeant*. Or, si la force η définie dans (1.3) est *non-dégénérée* :

$$b_s \neq 0, \quad \text{si } |s| \leq n_*, \tag{12.5}$$

avec $n_* \in \mathbb{N}^*$ convenable, alors $\mathrm{u}(t)$ est un processus *exponentiellement mélangeant :*

$$||\Sigma_t(\mathrm{u}') - \Sigma_t(\mathrm{u}'')||^*_{L(L_1)} \leq Ce^{-ct}, \quad \forall t \geq 0. \tag{12.6}$$

Le théorème 3.1.7 de [23] implique (12.6) si $n_* = n_*(\nu)$ est suffisamment grand (par exemple, si $b_s \neq 0$, $\forall s$), et la méthode développée dans [15] implique (12.6) avec un certain n_* qui ne dépend pas de ν. La relation (12.6) entraîne que le processus $\mathrm{u}^\omega(t)$ est "bien ergodique". Pou illustrer, prenons $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$ et considérons le processus $f(\mathrm{u}(t))$. On peut démontrer que $f(\mathrm{u}(t))$ satisfait

la loi forte des grands nombres et *le théorème central limite* [23, Section 4]. Le problème reste ouvert si la relation (12.6) est vraie avec des constantes c et C qui ne dépendent pas de $\nu \in (0,1]$.

13. Fonction de structure

La *fonction de structure* est l'un des objets principaux de la théorie de la turbulence hydrodynamique [13]. Pour un "fluide unidimensionnel" qui est décrit par l'équation de Burgers, la fonction de structure est définie comme suit :

Définition 13.1. *Si* u *désigne la solution de l'équation de Burgers alors sa fonction de structure de degré $p > 0$ est*

$$S_p(l) = \langle\langle \int_{\mathbb{S}^1} |\,\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x)|^p dx \rangle\rangle, \quad l \in (0,1]. \tag{13.1}$$

Théorème 13.1. *Soit $B_m < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\nu \in (0, c_*]$, où $c_* \le 1$ une constante qui dépend seulement de B_1, B_2, ...*

(1) *Soit $p > 0$. Il existe $c_p > 0$ telle que*

$$S_p(l) \le \begin{cases} c_p l^p, & si\ p \in (0,1), \\ c_p l^p \nu^{1-p}, & si\ p \ge 1, \end{cases} \quad pour\ tout\ l \in (0,1]\ et\ \nu \in (0,1]. \tag{13.2}$$

(2) *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$, et pour chaque $p > 0$, il existe $c'_p(c_1,c_2) > 0$ telle que*

$$S_p(l) \ge \begin{cases} c'_p l^p, & si\ p \in (0,1), \\ c'_p l, & si\ p \ge 1, \end{cases} \quad pour\ tout\ l \in [c_1\nu, c_2]\ et\ \nu \in (0, c_*]. \tag{13.3}$$

Démonstration. 1) Si $p \ge 1$, alors

$$S_p(l) \le \langle\langle \int |\,\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x)|dx \cdot \max_x |\,\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x)|^{p-1}\rangle\rangle.$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$S_p(l) \le \underbrace{\langle\langle \Big(\int |\,\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x)|dx \Big)^p \rangle\rangle^{1/p}}_{=:I} \underbrace{\langle\langle \max_x |\,\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x)|^p \rangle\rangle^{(p-1)/p}}_{=:J}.$$

D'une part, remarquons que la moyenne de $x \mapsto \mathrm{u}(x+t) - \mathrm{u}(x)$ est nulle, donc par le lemme 4.1

$$\int |\,\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x)|dx \le 2 \int (\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x))^+ dx \le 2 \sup_x (\mathrm{u}_x)^+ \cdot l,$$

et $I \le 2l \langle\langle [\sup_x (\mathrm{u}_x)^+]^p \rangle\rangle^{1/p}$. Donc, d'après le corollaire 4.1, on obtient que $I \le c_p l$. D'autre part,

$$J \le \langle\langle l^p |\,\mathrm{u}_x|_\infty^p \rangle\rangle^{(p-1)/p}.$$

De l'inégalité (3.2) (avec $\theta(0,1,\infty,m-1)$) et celle de Hölder, on obtient

$$\langle\langle l^p |\,\mathrm{u}_x|_\infty^p \rangle\rangle^{\frac{p-1}{p}} \le \Big[c l^p \langle\langle \|\,\mathrm{u}\,\|_m^{\frac{2p}{2m-1}} |\,\mathrm{u}_x|_1^a \rangle\rangle \Big]^{\frac{p-1}{p}} \le c l^{p-1} \langle\langle \|\,\mathrm{u}\,\|_m^2 \rangle\rangle^{\frac{p-1}{2m-1}} \langle\langle |\,\mathrm{u}_x|_1^b \rangle\rangle^c,$$

pour certaines constantes $a, b, c > 0$. Maintenant, enutilisant le corollaire 4.1 et le théorème 8.2, on obtient que

$$J \le c' l^{p-1} \nu^{-(p-1)}.$$

Finalement $S_p(l) \le c_p l^p \nu^{1-p}$, si $p \ge 1$.

Si $p \in (0,1)$, alors nous obtenons par l'inégalité de Hölder et par (13.2) avec $p = 1$:

$$S_p(l) \le \langle\langle \int |\,\mathrm{u}(x+l) - \mathrm{u}(x)|dx \rangle\rangle^p = S_1(l)^p \le (c_1 l)^p.$$

Ceci achève la preuve de (13.2).

2) Notons par Q_1 l'événement dans (8.5) avec $m = 1$. Alors $\rho(Q_1) \ge C(1, \sigma_0)$. Soit $M > 0$ et

$$Q_2 = \{(t,\omega) \in Q_1 : |\,\mathrm{u}_x^{\omega +}(t)|_\infty + |\,\mathrm{u}_x^\omega(t)|_1 + \nu^{\frac{3}{2}} \|\,\mathrm{u}^\omega(t)\|_2 + \nu^{\frac{5}{2}} \|\,\mathrm{u}^\omega(t)\|_3 \} \le M\}.$$

Par le corollaire 4.1, (8.4) et l'inégalité de Tchebychev :

$$\rho(Q_2) \geq C(1, \sigma_0) - C_1 M^{-1} \geq \frac{1}{2} C(1, \sigma_0),$$

pour tout $\nu \in (0, c_*]$ et si M est suffisamment grand.

Soit $(t, \omega) \in Q_2$ et notons $v(x) := \mathrm{u}^\omega(t, x)$. Pour établir (13.3), nous montrons que v satisfait

$$\int |v(x+l) - v(x)|^p dx \geq C l^{\min(1,p)}, \quad l \in [c_1 \nu, c_2], \ p > 0, \tag{13.4}$$

uniformément en $\nu \in (0, 1]$, où $C = C(c_1, c_2, p) > 0$.

D'abord, supposons que $p \geq 1$. Notons que

$$\alpha \nu^{-1} \leq \int |v_x|^2 dx \leq |v_x|_\infty |v_x|_1 \leq M |v_x|_\infty,$$

où α est définie dans le corollaire 8.2. Donc

$$|v_x|_\infty \geq \alpha M^{-1} \nu^{-1} =: \alpha_2 \nu^{-1}, \tag{13.5}$$

uniformément en ν. Comme $|v_x^+|_\infty \leq M$, alors $|v_x^+|_\infty \leq \frac{1}{2} \alpha_2 \nu^{-1}$, si $\nu \leq \frac{1}{2} \alpha_2 M^{-1} =: c_*$. Ainsi, par (13.5), on a

$$|v_x^+|_\infty \leq \frac{1}{2} \alpha_2 \nu^{-1}, \quad \text{et } |v_x^-|_\infty \geq \alpha_2 \nu^{-1}, \quad \text{si } \nu \in [0, c_*].$$

Notons par $z = z(t, \omega) = \min\{x \in [0, 1) : v_x^-(x) \geq \alpha_2 \nu^{-1}\}$: z est une fonction mesurable bien définie sur Q_2, si $\nu \in [0, c_*]$.

Nous avons

$$\int |v(x+l) - v(x)|^p dx \geq \int_{z-\frac{l}{2}}^{z} \Big| \int_x^{x+l} v_x^-(y) dy - \int_x^{x+l} v_x^+(y) dy \Big|^p dx. \tag{13.6}$$

Par le lemme 3.2, on a $|\,\mathrm{u}_{xx}\,|_\infty \leq C_2 ||\,\mathrm{u}\,||_2^{\frac{1}{2}} ||\,\mathrm{u}\,||_3^{\frac{1}{2}}$, ce qui implique que $|v_{xx}|_\infty \leq C_2 M \nu^{-2}$. Donc, dans l'intervalle $[x, x + \alpha_3 \nu]$, $\alpha_3 > 0$, nous avons

$$v_x^- \geq \alpha_2 \nu^{-1} - \alpha_3 C_2 M \nu^{-1} = \frac{3}{4} \alpha_2 \nu^{-1},$$

si $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{4 C_1 M}$. Supposons que $l \geq \alpha_3 \nu$. Comme $v_x^+ \leq M$, alors

$$\int_x^{x+l} v_x^-(y) dy \geq \int_x^{x+\alpha_3 \nu} v_x^-(y) dy \geq \frac{3}{4} \alpha_2 \alpha_3, \quad \text{et } \int_x^{x+l} v_x^+(y) dy \leq M l.$$

Donc, en utilisant (13.6), nous obtenons que

$$\int |v(x+l) - v(x)|^p dx \geq \int_{z-\frac{l}{2}}^{z} \Big| \frac{3}{4} \alpha_2 \alpha_3 - M l \Big|^p dx \geq \frac{l}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \alpha_3 \right)^p,$$

pourvu que $l \in [\alpha_3 \nu, \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4M}]$ et $\nu \in [0, c_*]$. Ainsi, la relation (13.3) est établie avec $c_* = \frac{1}{2} \alpha_2 M^{-1}$, $c_1 = \alpha_3$ et $c_2 = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4M}$, si $p \geq 1$.

Maintenant, supposons que $p \in (0, 1)$. Soit f une fonction arbitraire positive. Nous pouvons l'écrire comme $f = f^{\frac{2-2p}{2-p}} f^{\frac{p}{2-p}}$. Donc, d'après l'inégalité de Hölder, nous avons $\left(\int f \right)^{2-p} \leq \left(\int f^2 \right)^{1-p} \left(\int f^p \right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int |v(x+l) - v(x)|^p dx &\geq \int \Big((v(x+l) - v(x))^+ \Big)^p dx \\ &\geq \left(\int \Big((v(x+l) - v(x))^+ \Big)^2 dx \right)^{p-1} \left(\int \Big((v(x+l) - v(x))^+ \Big) dx \right)^{2-p}. \end{aligned}$$

Comme $v_x^+ \leq M$, alors $(v(x+l) - v(x))^+ \leq M l$. De plus, $p - 1 < 0$, donc le premier terme du membre de droite de cette dernière inégalité est minoré par $\left(M^2 l^2 \right)^{p-1}$.

Remarquons que la fonction $v(\cdot + l) - v(\cdot)$ est de moyenne nulle. Par conséquent

$$\int (v(x+l) - v(x))^+ dx = \frac{1}{2} \int |v(x+l) - v(x)| dx,$$

et utilisant (13.4) avec $p = 1$, nous obtenons que le second terme est minoré par Cl^{2-p}. Finalement, (13.4) est établi pour $p \in (0, 1)$. $\square$

14. Spectre de l'énergie

Définition 14.1. *On appelle l'énergie de nombre d'onde k correspondant à la solution* u *de l'équation de Burgers, la grandeur :*

$$E_k = \frac{1}{2k(M - M^{-1})} \sum_{M^{-1}k \le |n| \le Mk} \frac{1}{2} \langle\langle |\,\mathrm{u}_n\,|^2 \rangle\rangle. \tag{14.1}$$

où M est une constante positive indépendante de ν. La fonction $k \longmapsto E_k$ est le spectre de l'énergie.

Le théorème 9.1 dit que si k est supérieur au *seuil critique* égal à ν^{-1}, alors le spectre de l'énergie décroît plus vite que n'importe quelle puissance négative de k, et que cela n'est pas valide si $k \ll \nu$.

Dans cette partie, nous continuons l'étude du spectre de l'énergie E_k quand $k \lesssim \nu^{-1}$.

Théorème 14.1. *Soit M dans (14.1) suffisament grand, et $c_1, c_2 > 0$ les constantes du théorème 13.1, alors il existe $c_3, c_4 > 0$ telles que pour tout k satisfaisant la condition*

$$c_2^{-1} \le k \le (c_1\nu)^{-1}, \tag{14.2}$$

nous avons

$$c_3 k^{-2} \le E_k \le c_4 k^{-2}. \tag{14.3}$$

Démonstration. On précise que les constantes C, $C_k, \ldots$etc, de cette preuve ne dépendent pas de M. La relation (9.4) implique que $\langle\langle |\,\mathrm{u}_k\,|^2 \rangle\rangle \le Ck^{-2}$. Notons que cette relation entraîne la seconde inégalité de (14.3). Maintenant, nous vérifions la première. Comme $\langle\langle |\,\mathrm{u}_k\,|^2 \rangle\rangle \le Ck^{-2}$, alors

$$\sum_{|n| \le M^{-1}k} |n|^2 \langle\langle |\,\mathrm{u}_n(t)|^2 \rangle\rangle \le CM^{-1}k, \tag{14.4}$$

et

$$\sum_{|n| \ge Mk} \langle\langle |\,\mathrm{u}_n(t)|^2 \rangle\rangle \le C' M^{-1} k^{-1}, \tag{14.5}$$

Posons $S = \sum_{|n| \le Mk} |n|^2 \langle\langle |\,\mathrm{u}_n(t)|^2 \rangle\rangle$. Comme $|\sin(\alpha)| \le |\alpha|$, alors

$$S \ge \frac{k^2}{\pi^2} \sum_{|n| \le Mk} \sin^2(\frac{n\pi}{k}) \langle\langle |\,\mathrm{u}_n\,|^2 \rangle\rangle = \frac{k^2}{\pi^2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sin^2(\frac{n\pi}{k}) \langle\langle |\,\mathrm{u}_n\,|^2 \rangle\rangle - \sum_{|n| > Mk} \sin^2(\frac{n\pi}{k}) \langle\langle |\,\mathrm{u}_n\,|^2 \rangle\rangle \right). \tag{14.6}$$

Notons que par l'identité de Parseval, nous avons

$$||\,\mathrm{u}(\cdot + y) - \mathrm{u}(\cdot)||^2 = 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sin^2(n\pi y) |\,\mathrm{u}_n\,|^2.$$

Donc, (14.6) et (14.5) impliquent que

$$S \ge \frac{k^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{4} \langle\langle ||\,\mathrm{u}(\cdot + \frac{1}{k}) - \mathrm{u}(\cdot)||^2 \rangle\rangle - \sum_{|n| > Mk} \langle\langle |\,\mathrm{u}_n\,|^2 \rangle\rangle \right) \ge k^2 C_1 S_2(\frac{1}{k}) - CM^{-1}k. \tag{14.7}$$

Comme k satisfait (14.2), alors par (14.7) et (13.3) ($p = 2$, $l = \frac{1}{k}$), nous avons

$$S \ge k^2 C_1 c_2' k^{-1} - C' M^{-1} k = k(C'' - C' M^{-1}). \tag{14.8}$$

Notons que

$$E_k \ge E_k^- = \frac{1}{4k^3 M^3} \sum_{M^{-1}k \le |n| \le Mk} |n|^2 \langle\langle |\,\mathrm{u}_n(t)|^2 \rangle\rangle.$$

Donc, en utilisant (14.8) et (14.4), on obtient que

$$E_k \geq \frac{1}{4k^3M^3}\left(S - \sum_{|n|\leq M^{-1}k} |n|^2\langle\langle |\,\mathrm{u}_n\,|^2\rangle\rangle\right) \geq \frac{C'' - C'M^{-1} - CM^{-1}}{4k^2M^3} > k^{-2}M^{-3}C_3, \quad C_3 > 0$$

si $M \gg 1$. D'où la première inégalité de (14.3).

□

En ignorant les constantes multiplicatives devant les puissances de ν, les physiciens écrivent le segment $[c_2^{-1}, c_1^{-1}\nu^{-1}]$ comme $[\nu^0, \nu^{-1}]$ et l'appellent la *zone inertielle*. Alors, le théorème 14.1 dit que dans la zone inertielle l'énergie E_k se comporte comme k^{-2}. De même, on appelle le segment $[\nu^{-1}, +\infty)$ la *zone dissipative*, et dans ce cas, le théorème 13.1 se traduit par le fait que dans cette zone, l'énergie décroît plus vite que toute puissance négative de k. On renvoie à [7] pour une assertion plus forte, qui justifie plus rigoureusement la définition de ces zones.

15. Appendice A : Le processus de Wiener standard

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, muni de la distance :

$$d(u,v) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{\max\limits_{0\leq t\leq n} |u(t)-v(t)|}{1 + \max\limits_{0\leq t\leq n} |u(t)-v(t)|},$$

$(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+), d)$ est un espace métrique complet et séparable. Soit $\mathcal{B}$ la tribu Borélienne de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ et soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé standard [11]. Par exemple, $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu Borélienne $\mathcal{F}$ et de la mesure de Lebesgue.

Considérons l'application mesurable $w : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{C}(\mathbb{R}^+), \mathcal{B})$, $\omega \longmapsto w^\omega$, telle que :

(1) $w^\omega(0) = 0$,

(2) pour tout $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N$, la variable aléatoire $\omega \longmapsto (w^\omega(t_1), \ldots, w^\omega(t_N)) \in \mathbb{R}^N$ est Gaussienne,

(3) pour chaque $t \geq 0$, $\mathbb{E}[w^\omega(t)] = 0$ et $\mathbb{E}[w^\omega(t)^2] = t$, et

(4) si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, alors les variables aléatoires $w(t_4) - w(t_3)$ et $w(t_2) - w(t_1)$ sont indépendantes.

On appelle une telle application mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un *processus de Wiener standard*. Notons que si on pose $\widetilde{w}(t) = w(\widetilde{t} + t) - w(\widetilde{t})$ pour $\widetilde{t} \geq 0$ fixé, alors $\widetilde{w}$ définit aussi un processus de Wiener standard. Il est connu qu'on peut construire une famille dénombrable $w_1, w_2, \ldots$ de processus de Wiener standard indépendants [14], [20].

La célèbre inégalité maximale de Doob [14], [17], [28], appliquée à un processus de Wiener standard $w(t)$ dit que

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |w(t)|^2\Big)^p\Big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[\big(|w(t)|^2\big)^p\big], \quad \forall p > 1. \tag{15.1}$$

L'inégalité (15.1) reste vraie si $|w(t)| = \big(w_1(t)^2 + \ldots + w_N(t)^2\big)^{1/2}$, et $w_1, \ldots, w_N$ sont des processus de Wiener standard indépendants.

16. Appendice B : Les temps d'atteinte et d'arrêt, et la propriété de Markov forte

Soit $t, m \geq 0$, $B_m < \infty$ et $\mathrm{u}(t) \in H^m$, une solution de (B). Soit $Q \subset H^m$ un sous-ensemble fermé, et une constante $T > 0$. Notons

$$\tau = \tau^\omega_{Q,T} = \inf\{0 \leq t \leq T : \mathrm{u}^\omega(t) \in Q\}.$$

Ici, $\tau = T$ si $\mathrm{u}^\omega(t) \notin Q$ pour $t \leq T$. On appelle τ le *temps d'atteinte* (dans l'ensemble fermé Q). C'est un cas particulier du *temps d'arrêt* [14], [26], [17]. Notons que $\tau = 0$ si $Q = H^m$, et que $\tau = T$ si $Q = \varnothing$.

L'importance de ces concepts vient de la propriété des processus de Markov, qu'on appelle : *propriété de Markov forte*. Nous la formulons pour une solution $\mathrm{u}(t) = \mathrm{u}^\omega(t; \mathrm{u}_0^\omega)$ de (B), où u_0 est une variable aléatoire dans H^1 indépendante de ξ^ω et telle que $\mathbb{E}[|| \mathrm{u}_0 ||_1] < \infty$. Soit $T_1 \geq T$ et $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$, alors

$$\mathbb{E}[f(\mathrm{u}(T_1)] = \mathbb{E}[S_{T_1 - \tau^\omega_{Q,T}} f(\mathrm{u}(\tau^\omega_{Q,T}))]. \tag{16.1}$$

Ici, la fonction $S_t f(v)$ est défini dans (5.4) où nous avons remplacé t par $T_1 - \tau^\omega_{Q,T}$, et v par $\mathrm{u}(\tau^\omega_{Q,T})$. Notons que si $\tau = T$ et $\mathrm{u}(0) = const$, alors (16.1) coïncide avec la propriété de Kolmogorov-Chapman (5.9).

17. Notation

Soit $x \in \mathbb{S}^1$, $p \in [1, \infty]$ et $m \in \mathbb{R}$. Pour une fonction $\mathrm{u}(x)$, nous notons par $|\,\mathrm{u}\,|_p$ sa norme dans l'espace de Lebesgue $L_p(\mathbb{S}^1)$, et par $||\,\mathrm{u}\,||_m$ sa norme de Sobolev homogène d'ordre m. Si $m = 0$, nous écrivons $||\,\mathrm{u}\,|| := ||\,\mathrm{u}\,||_0 = |\,\mathrm{u}\,|_2$.

Soit $\lambda > 0$. Nous désignons par $\lambda \gg 1$ (resp. $\lambda \ll 1$) si λ est suffisamment grand (resp. λ est suffisamment petit).

L'abbreviation p.p désigne "presque partout".

Références

[1] Aurell, E., Frisch, U., Lutsko, J., Vergassola, M., 1992. On the multifractal properties of the energy dissipation derived from turbulence data. Journal of Fluid Mechanics 238, 467–486.

[2] Bec, J., Khanin, K., 2007. Burgers turbulence. Physics Reports 447, 1–66.

[3] Billingsley, P., 1999. Convergence of Probability Measures, John Wiley & Sons, New York.

[4] Biryuk A., 2001. Spectral Properties of Solutions of Burgers Equation with Small Dissipation. Functional Analysis and Its Applications. Vol. 35., No 1.

[5] Biryuk, A., 2001. Estimates for Spatial Derivatives of Solutions for Quasilinear Parabolic Equationswith Small Viscosity (PhD thesis). Heriot-Watt University, Edinburgh, Scotland.

[6] Bogachev, V.I., 1998. Gaussian Measures, Mathematical Surveys and Monographs. AMS, Providence.

[7] Boritchev, A., 2012. Sharp Estimates for Turbulence in White-Forced Generalised Burgers Equation, Geometric and Functional Analysis, 23.

[8] Boritchev, A., 2012. Equation de Burgers généralisée à force aléatoire et à viscosité petite (Thèse de doctorat). École polytechnique, Palaiseau, France.

[9] Bourbaki, N, 1965. Integration. Livre VI. Paris, Hermann, 1965.

[10] Cartan, H., Takahashi, R., 1961. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris, France.

[11] Dudley, R.M., 2002. Real analysis and probability, Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, New York.

[12] Evans, L.C., 2010. Partial differential equations, 2nd ed. ed, Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I.

[13] Frisch, U., 1995. Turbulence : the Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press, Cambridge.

[14] Le Gall, J.-F., 2013. Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Mathématiques et Applications. Springer-Verlag, Berlin ; Heidelberg.

[15] Hairer, M., Mattingly, J., 2006. Ergodicity of the 2D Navier–Stokes equations with degenerate stochastic forcing. Annals of Mathematics 164, 993–1032.

[16] Kappeler, T., Pöschel, J., 2003. KdV & KAM. Springer-Verlag, Berlin ; New York.

[17] Karatzas, I., Shreve, S., 1991. Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.

[18] Khasminskii, R., 2012. Stochastic Stability of Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin ; Heidelberg.

[19] Kružkov, S.N., 1964. The Cauchy problem in the large for non-linear equations and for certain first-order quasilinear systems with several variables. Dokl. Akad. Nauk SSSR 155, 743–746.

[20] Kuo, H.-H., 1975. Gaussian Measures in Banach Spaces. Springer-Verlag, Berlin.

[21] Kuksin, S.B., 1997. On turbulence in nonlinear Shrödinger equation. Geometric and Functional Analysis 7, 338–363.

[22] Kuksin, S.B., 1999. Spectral properties of solutions for nonlinear PDEs in the turbulent regime. Geometric and Functional Analysis 9, 141–184.

[23] Kuksin, S., Shirikyan, A., 2012. Mathematics of Two-Dimensional Turbulence. Cambridge University Press, Cambridge

[24] Lions, J.-L., 1969. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires. Gauthier-Villars, Paris.

[25] Lions, J.-L., Magenes, E., 1968. Problèmes aux limites non homogènes et applications, Travaux et recherches mathématiques. Dunod, Paris, France.

[26] Øksendal, B., 2003. Stochastic Differential Equations. An introduction with applications. Springer-Verlag, Heidelberg ; New York.

[27] Poschel, J., Trubowitz, E., 1987. Inverse Spectral Theory. Academic Press, Boston.

[28] Shiryaev, A.N., 1996. Probability. Springer-Verlag, Berlin.

[29] Taylor, M.E., 2011. Partial differential equations III, III. Springer-Verlag, New York.

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, F-75013, Paris, France

E-mail address: `takfarinas.kelai@imj-prg.fr`

CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, F-75013, Paris, France

E-mail address: `sergei.kuksin@imj-prg.fr`